Analytická geometrie lineárních útvarů v rovině

- Rovnice přímky v rovině
- Vzájemná poloha přímek v rovině
- Odchylka přímek v rovině
- Vzdálenost bodu od přímky v rovině

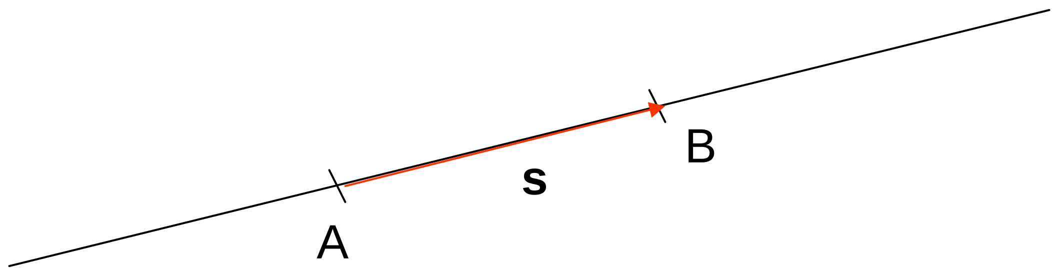
Rovnice přímek v rovině

- Parametrické rovnice přímky
- Obecná rovnice přímky
- Směrnicový tvar rovnice přímky

Parametrické rovnice přímky

Každé dva různé body A, B určují přímku, kterou označujeme AB.

Vektor **s** = B – A se nazývá směrový vektor přímky AB .



Směrový vektor přímky

- Přímku můžeme určit pomocí nekonečného počtu dvojic bodů, proto má přímka nekonečně mnoho směrových vektorů a všechny jsou kolineární (navzájem rovnoběžné).
- Každý směrový vektor je nenulovým násobkem jiného směrového vektoru.
- Směrový vektor každé přímky je nenulový

Odvození parametrických rovnic přímky

- Přímka může být jednoznačně určena :

  1. dvěma body

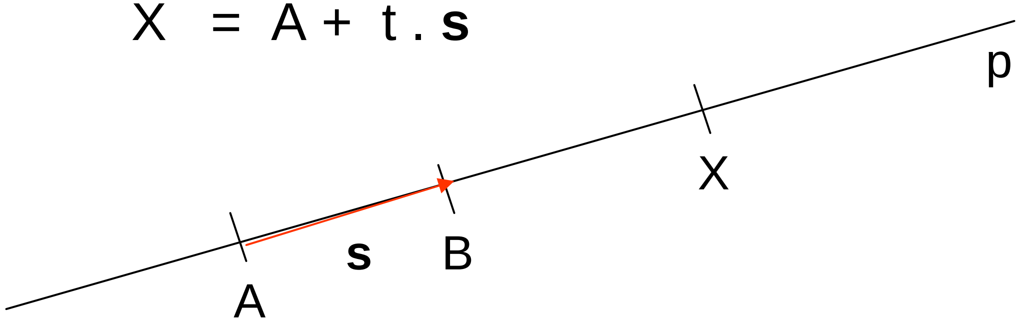
  2. jedním bodem a směrovým vektorem

Přímku p určíme bodem A [a_1 ; a_2] a směrovým vektorem **s** = (s_1; s_2). Pro libovolný bod X [x ; y] ležící na přímce p platí :

$$X - A = t \,.\, (B - A)$$

$$X - A = t \,.\, \mathbf{s}$$

$$X = A + t \,.\, \mathbf{s}$$



Parametrické rovnice přímky

Rovnice

$$X = A + t \cdot \mathbf{s} \quad ; \quad t \in R$$

se nazývá parametrická rovnice přímky

(parametrické vyjádření přímky) určené bodem A a vektorem **s** .Proměnná t se nazývá parametr.

Parametrická rovnice přímky vyjádřená v souřadnicích

$$\underline{X = A + t \cdot \mathbf{s}} \quad ; \quad t \in R$$

$$x = a_1 + ts_1$$

$$y = a_2 + ts_2 \quad , t \in R$$

Příklady

- Napište parametrické rovnice přímky, která je určena :

a) bodem A [-1; 4] a směrovým vektorem

s = (2 ; -5)

b) body A [-3; 4] , B [2; -1]

Řešené příklady

Zjistěte, zda body A [3 ; -1] , B [-4; 5] leží na přímce p, která má parametrické vyjádření : $x = 2 - 3t$

$y = 1 + 2t$, $t \in R$.

Řešení

- souřadnice bodu A dosadíme do parametr. rovnice přímky p, tzn.

$$3 = 2 - 3t \rightarrow t = -1/3$$

$$-1 = 1 + 2t \rightarrow t = -1$$

parametr t se liší z každé rovnice svou hodnotou tzn. bod A neleží na přímce p

- souřadnice bodu B dosadíme do parametr. rovnice přímky p, tzn.

$$-4 = 2 - 3t \rightarrow t = 2$$

$$5 = 1 + 2t \rightarrow t = 2$$

hodnota parametru je u obou rovnic stejná, tzn. bod B leží na přímce p

Příklady

1. Napište parametrické rovnice přímek, na kterých jsou strany trojúhelníku s vrcholy A, B , C, je-li :
   a) A [-7 ; 4] , B [3 ; 2] , C [-1 ; 4]
   b) A [2 ; -5] , B [-1 ; -2] , C [-3 ; 2]

2. V trojúhelníku ABC určete parametrické rovnice těžnic, je-li:
   a) A [-1 ; 2] , B [3 ; 6] , C [-5 ; 4]
   b) A [2 ; 3] , B [-4 ; 7] , C [4 ; 0]

Obecná rovnice přímky

Rovnice

$$ax + by + cz = 0 ,$$

kde aspoň jedno z čísel a , b je nenulové, se nazývá obecná rovnice přímky.

Převod parametrické rovnice přímky na obecnou rovnici

Napište obecnou rovnici přímky, která je určena body A [-2 ; 7] , B [3 ; 4].

Řešení

1. napíšeme parametrické rovnice přímky AB : **s** = B – A = (5 ; -3)

$$x = -2 + 5t \quad / \,.\, 3$$

$$y = 7 - 3t \quad / \,.\, 5$$

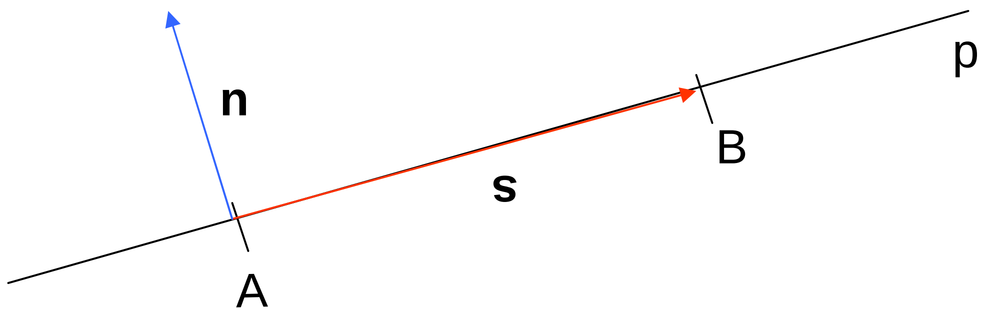
2. rovnice vhodně vynásobíme a sečteme je, abychom ze součtu vyloučili paramatr t

$$3x + 5y = 29$$

$$3x + 5y - 29 = 0$$

Normálový vektor

Vektor kolmý ke směrovému vektoru přímky se nazývá normálový vektor této přímky.



Vlastnosti normálového vektoru

1. Směrový a normálový vektor přímky jsou navzájem kolmé, tzn. **s** . **n** = 0
2. Souřadnice normálového vektoru určíme z obecné rovnice přímky ax + by + cz = 0

   n = (a ; b)

3. Vztah mezi souřadnicemi směrového a normálového vektoru přímky :

   je-li **s** = (a ; b) ,pak **n** =(-b ; a) nebo **n** = (b ;-a)

   tzn. souřadnice normálového vektoru získáme ze směrového vektoru tak, že je zaměníme a u jedné ze souřadnic změníme znaménko

Příklady

1. Určete směrový a normálový vektor přímky :

   a) $3x - 5y + 7 = 0$

   b) $4x - 6y - 12 = 0$

2. Zjistěte, zda na přímce $2x - 3y + 6 = 0$ leží body : $A [3; 2]$, $B [0; 2]$

Řešený příklad

Napište obecnou rovnici přímky dané dvěma body A [-2; 3] , B [1; -4] .

Řešení

1. určíme souřadnice směrového vektoru **s** = B – A = (3 ; -7)
2. určíme souřadnice normálového vektoru **n** = (7 ; 3)
3. souřadnice normálového vektoru dosadíme do obecné rovnice přímky tj. $7x + 3y + c = 0$
4. do získané obecné rovnice přímky dosadíme souřadnice bodu A nebo B a vypočítáme hodnotu koeficientu c tj.

$$7x + 3y + c = 0$$

$$7 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + c = 0$$

$$-14 + 9 + c = 0$$

$$\underline{\mathbf{c = 5}}$$

obecná rovnice přímky AB : $7x + 3y + 5 = 0$

Příklady

1. Napište obecnou rovnici přímky určené dvěma body :

   a) A [3; -3] , B [1; 7]

   b) A [5; 0] , B [-1; 6]

2. Určete obecnou rovnici přímky, která je dána bodem a směrovým vektorem:

   a) A [7; -2] , s = (-1 ; 1)

   b) B [- 3; 0] , B [-1; 6]

1. domácí úkol

Napište obecné rovnice stran a těžnic trojúhelníku s vrcholy

A [2; - 5] , B [0; 3] , C [- 4; 1] .

Směrnicový tvar rovnice přímky

Rovnice

$$y = kx + q$$

Se nazývá směrnicový tvar rovnice přímky.

Číslo k se nazývá směrnice přímky.

Odvození směrnicového tvaru přímky

Směrnicový tvar rovnice přímky odvodíme z obecné rovnice přímky:

$$ax + by + c = 0$$

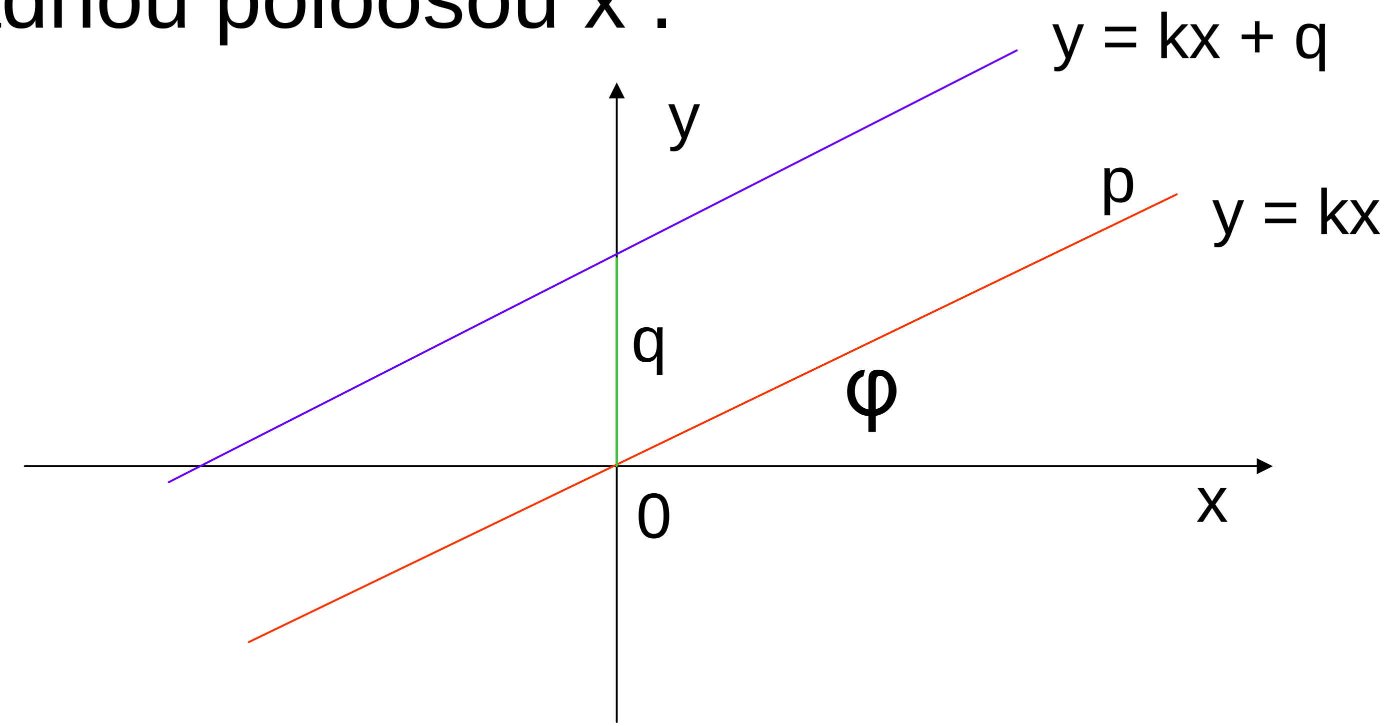
$by = - ax – c$ vydělíme b

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

označíme $k = -\frac{a}{b}$ $q = -\frac{c}{b}$

Směrový úhel přímky

- Směrový úhel přímky je úhel φ, který svírá přímka p, která je různoběžná s osou x, s kladnou poloosou x .



Směrnice přímky

- Směrnice přímky v rovině se rovná tangentě směrového úhlu.

$$k = \text{tg}\, \varphi$$

Přímka se směrovým vektorem **s** =(s_1; s_2)

má směrnici $$k = \frac{s_2}{s_1}$$

Poznámka

1. Přímka rovnoběžná s osou x má směrnici rovnu nule.

2. Přímky rovnoběžné s osou y se nazývají přímky bez směrnice.

Příklady

1. Napište směrnicový tvar rovnice přímky:

   a) $2x - 4y + 6 = 0$

   b) $-x + 2y + 3 = 0$

   c) $x = 3t - 1$

   $y = -2t + 2, \; t \in R$

   d) $x = 3 - 4t$

   $y = 7 + 3t, \; t \in R$

Příklady

2. Napište směrnicový tvar rovnice přímky určené body :
   a) A [-3 ; 7] , B [2 ; 5]
   b) C [-4 ; -1] , D [2 ; -4]
   c) E [-4 ; 7] , F [3 ; 5]
3. Určete směrnici k přímky p : y = kx -1, víte-li, že přímka p prochází bodem
   a) A [1 ; 3]
   b) A [-2 ; 1]

Vzájemná poloha přímek v rovině

přímky v rovině mohou být :

1. různoběžné
2. rovnoběžné různé
3. rovnoběžné splývající tj. totožné

Způsoby řešení vzájemné polohy 2 přímek

Vzájemnou polohu dvou přímek daných analytickým vyjádřením lze řešit dvěma způsoby:

1. Podle společných bodů

   tzn. řešíme soustavu rovnic přímek

   různoběžky   mají 1 společná bod

   různé rovnoběžky nemají společné body

   totožné přímky   mají nekonečně mnoho společných bodů

Řešené příklady

Určete vzájemnou polohu přímek :

a) p : $2x - y - 1 = 0$

q : $5x - 4y + 2 = 0$

řešíme jako soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

z 1. rovnice vyjádříme $y = 2x – 1$ a dosadíme do druhé rovnice

$$5x - 4(2x – 1) + 2 = 0$$

$$5x - 8x + 4 + 2 = 0$$

$$-3x = -6$$

$$x = 2$$

vypočítáme $y = 3$. tzn. soustava rovnic má 1 řešení

tj přímky jsou různoběžné a mají průsečík P [2 ; 3]

Řešené příklady

b) $p: \quad x - 3y - 2 = 0$

$\underline{q: \ -2x + 6y - 5 = 0}$

z 1. rovnice vyjádříme $x = 3y + 2$ a dosadíme do druhé rovnice

$$-2(3y + 2) + 6y - 5 = 0$$

$$-6y - 4 + 6y - 5 = 0$$

$$\underline{-9 = 0}$$

tzn. soustava rovnic nemá řešení

tj. přímky nemají žádné společné body a jsou rovnoběžné různé

Řešené příklady

c) p : $2x - 7y + 12 = 0$

q : $x - 3{,}5y + 6 = 0$

druhou rovnici vynásobíme -2 a obě rovnice sečteme

$$\begin{aligned} 2x - 7y + 12 &= 0 \\ -2x + 7y - 12 &= 0 \\ \hline 0 &= 0 \end{aligned}$$

tzn. Soustava rovnic má nekonečné mnoho řešení

tj. přímky jsou totožné

Způsoby řešení vzájemné polohy 2 přímek

2. Podle směrových (normálových) vektorů

Přímky p,q jsou rovnoběžné, jestliže směrový (normálový) vektor jedné z nich je reálným násobkem směrového (normálového) vektoru druhé přímky, tzn.

$$p \parallel q \iff \mathbf{s}_p = k\mathbf{s}_q \text{ , kde } k \in R - \{0\}$$

nebo

$$p \parallel q \iff \mathbf{n}_p = k\mathbf{n}_q \text{ , kde } k \in R - \{0\}$$

Řešené příklady

Určete vzájemnou polohu přímek :

a) p : $3x + 4y - 3 = 0$ q : $x = 1 + 2t$

$y = 2 - t, \; t \in R$

určíme souřadnice normálového vektoru přímky p a souřadnice směrového vektoru přímky q

$\mathbf{n}_p = (3 ; 4)$ $\mathbf{s}_q = (2 ; -1)$

jeden z vektorů převedeme na druhý tvar např. směrový vektor přímky q na normálový vektor tzn.

$\mathbf{n}_p = (3 ; 4)$ $\mathbf{n}_q = (1 ; 2)$

$\mathbf{n}_p \neq k \cdot \mathbf{n}_q$ tzn. přímky p, q jsou různoběžné

Řešené příklady

určení souřadnic průsečíku přímek p,q

hledáme souřadnice společného bodu přímek p,q tzn.

z parametrického vyjádření přímky q dosadíme za x,y

do obecné rovnice přímky p a určíme hodnotu parametru t :

$$p: \quad 3x + 4y - 3 = 0$$

$$3(1 + 2t) + 4(2 - t) - 3 = 0$$

$$3 + 6t + 8 - 4t - 3 = 0$$

$$2t = -8$$

$$\underline{t = -4}$$

hodnotu parametru t dosadíme do parametrické rovnice přímky q

a dostaneme souřadnice průsečíku přímek p, q tzn. P [-7 ; 6]

Řešené příklady

b) p : $2x + 3y - 7 = 0$ q : $x = -2 - 6t$

$y = 3 + 4t$, $t \in R$

určíme souřadnice normálového vektoru přímky p a souřadnice směrového vektoru přímky q

$\mathbf{n}_p = (2 ; 3)$ $\mathbf{s}_q = (-6 ; 4)$

jeden z vektorů převedeme na druhý tvar např. směrový vektor přímky q na normálový vektor tzn.

$\mathbf{n}_p = (2 ; 3)$ $\mathbf{n}_q = (4 ; 6)$

$\mathbf{n}_p = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{n}_q$ tzn. přímky p, q jsou rovnoběžné

Řešené příklady

rozlišíme zda jsou přímky rovnoběžné různé nebo totožné

tzn. mají-li společný bod

z rovnice přímky q určíme souřadnice bodu A [-2 ; 3]

zjistíme, jestli bod A leží také na přímce p , tzn

souřadnice bodu A dosadíme do rovnice přímky p

$$p:\ 2x + 3y - 7 = 0$$

$$2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 - 7 = 0$$

$$-4 + 9 - 7 = 0$$

$-2 \neq 0$ → A neleží na p tzn.

přímky p,q jsou rovnoběžné různé

Příklady

Určete vzájemnou polohu přímek :

a) p: $x + y - 3 = 0$

q : $2x + 3y - 8 = 0$

b) p: $x - y + 5 = 0$

q : $2x - 2y + 3 = 0$

c) p: $x = 5 + 4t$

$y = -2 - 2t,\ t \in R$

q : $x = 1 - 2r$

$y = 7 + r,\ r \in R$

d) p: $x = 3 + t$

$y = 2 - t,\ t \in R$

q : $x = 3r$

$y = -2r,\ r \in R$

Rovnoběžnost a kolmost přímek

Dvě přímky p,q jsou rovnoběžné právě tehdy, jsou-li jejich směrové (normálové) vektory kolineární.

Poznámka:

1. Jsou-li rovnice přímek zadány parametricky, pak jsou rovnoběžné jestliže : $\mathbf{s}_p = k \cdot \mathbf{s}_q$

2. Jsou-li rovnice přímek zadány v obecném tvaru pak, jsou rovnoběžné jestliže : $\mathbf{n}_p = k \cdot \mathbf{n}_q$

3. Přímky ve směrnicovém tvaru jsou rovnoběžné, mají-li stejné směrnice. $k_p = k_q$

Řešené příklady

Napište rovnici přímky p, která prochází bodem A a je rovnoběžná s přímkou q :

a) A [-5 ; 7] q : $x = 2 - 3t$

$y = 5 + 2t, t \in R$

1. přímky p,q jsou rovnoběžné tzn. směrový vektor hledané přímky p se rovná směrovému vektoru přímky q $\mathbf{s}_p = \mathbf{s}_q$ tj. $\mathbf{s}_p = \mathbf{s}_q = (-3 ; 2)$
2. do rovnice přímky p dosadíme souřadnice bodu A tzn. p : $x = -5 - 3t$

$y = 7 + 2t , t \in R$

Řešené příklady

b) A [1; -4] q : 5x - 2y + 9 = 0

1. normálový vektor přímky p se rovná normálovému vektoru přímky q tzn. $\mathbf{n}_p = \mathbf{n}_q = (5; -2)$

   p : 5x - 2y + c = 0

2. číslo c dopočítáme dosazením souřadnic bodu A za x a y : $5 \cdot 1 - 2 \cdot (-4) + c = 0$

   $c = -13$

p : 5x - 2y - 13 = 0

Řešené příklady

c) $A[2; -5]$ $q: y = 2x + 7$

1. rovnoběžky mají stejné směrnice tzn. $k_p = k_q = 2$

   $p: \; y = 2x + q$

2. parametr q dopočítáme dosazením souřadnic bodu A

   za x a y: $-5 = 2.2 + q$

   $\underline{q = -9}$

$p: \; \underline{y = 2x - 9}$

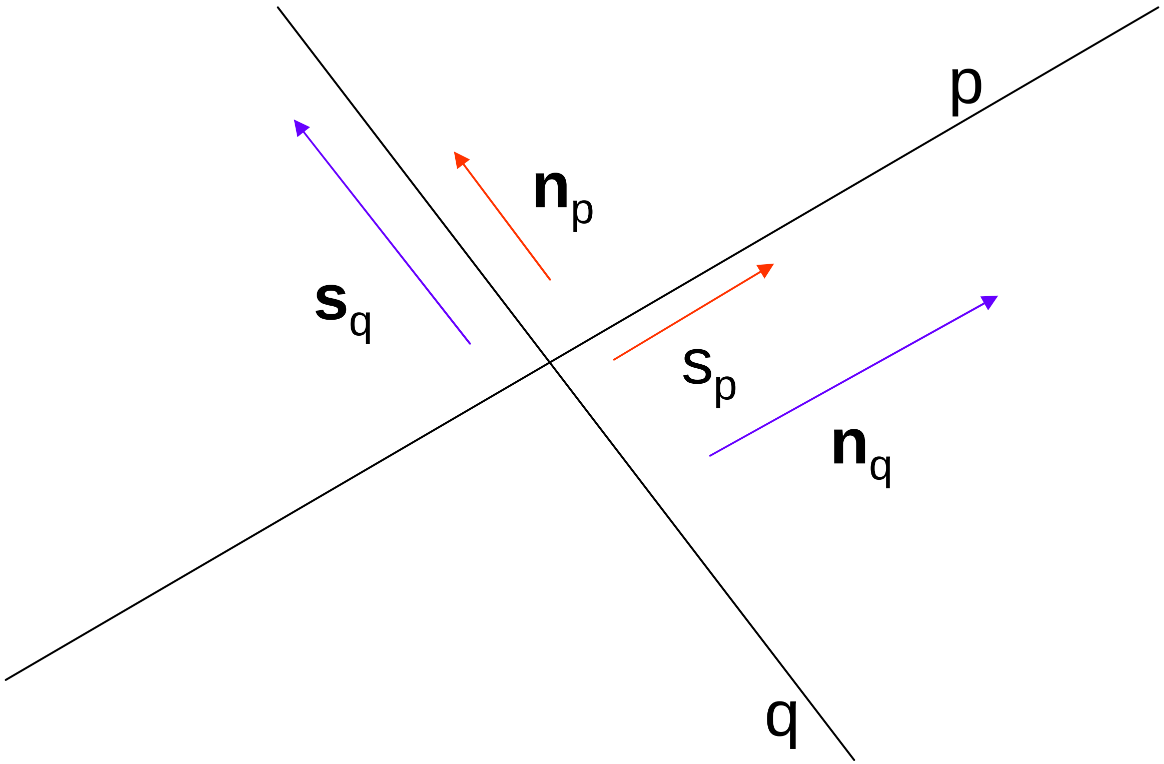
Kolmost přímek

Dvě přímky p,q jsou navzájem kolmé právě tehdy, jestliže skalární součin jejich směrových (normálových) vektorů se rovná nule.

Poznámka :

Jsou-li přímky p,q navzájem kolmé, pak směrový vektor přímky p je kolineární s normálovým vektorem přímky q a naopak. tzn. $\mathbf{s}_p = \mathbf{n}_q$ a naopak $\mathbf{n}_p = \mathbf{s}_q$

Kolmost přímek



Kolmost přímek

Pro kolmé přímky p,q ve směrnicovém tvaru platí :

$$k_p \, . \, k_q = -1$$

Řešené příklady

1. Napište parametrickou rovnici přímky p, která prochází bodem A [3; -5] a je kolmá k přímce q : x = -1 + 2t , y = 2 – 7t, t є R.

   $p \perp q \;\rightarrow\; \mathbf{s}_q = \mathbf{n}_p = (2\,;\,-7)$ tzn.

   $\mathbf{s}_p = (7\,;\,2)$

   do rovnice přímky p dosadíme souřadnice bodu A

   p : x = 3 + 7t

   y = -5 + 2t , t є R .

Řešené příklady

2. Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem A [-2; 7] a je kolmá k přímce

   $\underline{q : 2x + 5y - 8 = 0}$

   $p \perp q \rightarrow \mathbf{n}_q = \mathbf{s}_p = (2 ; 5)$ tzn. $\mathbf{n}_p = (5 ; -2)$

   dostáváme rovnici přímky p ve tvaru $5x - 2y + c = 0$

   parametr c vypočítáme dosazením souřadnic bodu A do této rovnice : $5 \cdot (-2) \ -2 \cdot 7 + c = 0$

   $\underline{c = 24}$

   p : $5x - 2y + 24 = 0$

Řešené příklady

3. Napište směrnicovou rovnici přímky p, která prochází bodem A [-4 ; 3] a je kolmá k přímce q : y = -4x + 2.

$p \perp q \;\rightarrow\; k_p \,.\, k_q = -1 \;\rightarrow\; k_p = -\frac{1}{k_q}$

přímka q má směrnici $k_q = -4 \;\rightarrow\; k_p = \frac{1}{4}$

přímka p má tvar $y = \frac{1}{4} x + q$

parametr q vypočítáme dosazením souřadnic bodu A do rovnice přímky p : $y = \frac{1}{4} x + q$

$$3 = \frac{1}{4} \,.\, (-4) + q$$

$$\underline{q = 4}$$

p : $y = \frac{1}{4} x + 4$

Příklady

1. Přímka p je dána bodem P[-0,5 ; 1] a směrovým vektorem **s** = (1,5 ; -3). Určete :
   a) parametrickou rovnici přímky q, která je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem A [5 ; 1]
   b) parametrickou rovnici přímky q, která je kolmá k přímce p a prochází bodem B [-2 ; 4] .
2. Napište rovnici přímky, která prochází bodem M [3 ; -4] a je kolmá k přímce:

   a) x = 1 – t , y = 3 + 5t, t є R   b) $y = -\frac{2}{3}x + 2$

   c) 3x - 2y + 14 = 0

Domácí úkol

Napište rovnici přímky, která prochází průsečíkem přímek

$x + y - 3 = 0$, $x - y + 7 = 0$ a je rovnoběžná s přímkou

a) $2x - 3y + 9 = 0$ b) $x = 3 - t$, $y = 5 + 4t$, $t \in R$

c) $y = -\frac{4}{5}x$

2. Určete rovnici přímky q, která prochází daným bodem a je kolmá k přímce p :

   a) p: $5x - 2y - 3 = 0$, M [1 ; 2] , M є q

   b) p: $1{,}5x + 2y + 3 = 0$, R [-2 ; -3] , R є q

   c) p: $y = -0{,}6x - 4$, T [6 ; 1] , M є q

Odchylka přímek v rovině

Odchylkou dvou přímek v rovině nazýváme velikost ostrého nebo pravého úhlu, který přímky svírají. Jeho velikost vypočítáme ze vztahu :

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,.\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

kde **u** , **v** jsou směrové, popřípadě normálové vektory daných přímek.

Příklady

Vypočítejte odchylku přímek :

a) $x - 3y + 6 = 0$, $x + 2y - 8 = 0$

b) $p : x = 2 + t$, $y = 1 - 2t, t \in R$, $q : x = -1 + r$,

$y = -r, r \in R$

c) $p :$ $x = 1 + t$, $y = -2 - t$, $t \in R$, $q : y = 3x - 1$

d) $p :$ $5x + y + 3 = 0$, $q : y = -5x + 2$

Vzdálenost bodu od přímky

Vzdálenost bodu M [m_1 ; m_2] od přímky $ax + by + c = 0$

se vypočítá podle vzorce :

$$v = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Příklady

1. Určete vzdálenost daných bodů od přímky p :

   a) A [2; 7] , A B[0; 0] , p : $3x - 4y - 14 = 0$

   b) A [2; -3] , B [-1; 8] , p : $12x - 5y + 39 = 0$

   c) M [5; 7] , p prochází body P [-4; 5], Q [11; -3]

   d) A [1; -2], p : $x = -1 + 2t$, $y = 3 - 5t$, $t \in R$

Řešené příklady

1. Vypočítejte délku výšky v_c v trojúhelníku ABC, kde A [1; 3], B [-3; 0], C [4; -2] .

$$|v_c| = v(C ; \mathbf{AB})$$

AB : $\mathbf{s} = (-4 ; -3) \rightarrow \mathbf{n} = (3 ; -4)$

$$3x - 4y + c = 0$$

A є AB $\quad 3 . 1 - 4 . 3 + c = 0$

$$\underline{c = 9}$$

AB : $\quad 3x - 4y + 9 = 0$

dosadíme do vzorce a dostáváme hodnotu $\underline{v_c = 5{,}8}$

Řešené příklady

2. Určete vzdálenost rovnoběžek p , q :

p : 2x + 3y – 1 = 0 , q : 4x + 6y = 0 .

Postup : Na jedné přímce zvolíme bod a určíme jeho vzdálenost od druhé přímky.

volíme bod A [2 ; -1] dosadíme do vzorce :

$$v(A,q)=\frac{|8-6|}{\sqrt{16+36}}=\frac{2}{\sqrt{52}}.\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{52}}=\frac{2\sqrt{52}}{52}=\frac{\sqrt{52}}{26}=\frac{2\sqrt{13}}{26}=\frac{\sqrt{13}}{13}$$

Příklady

1. Vypočítejte vzdálenost rovnoběžek p , q :
   a) p : $x + y + 6 = 0$, q : $x + y - 4 = 0$
   b) p : $y = -2x + 5$, q : $y = -2x - 1$
   c) p : $x = 4 + 4t$, $y = -3t$, $t \in R$, q : $y = -0\ 75x$

2. Vypočítejte délky všech výšek v trojúhelníku ABC :
   A [5; 2], B [1; 5], C [-2; 1] .