Příklad :

Vyšetřete průběh funkce f : $\mathbf{y = x^4 - 6x^2 + 8}$

Určete:

1) Definiční obor
2) Body nespojitosti
3) Průsečíky s osami
4) Stacionární body
5) Intervaly rostoucí, klesající
6) Lokální minimum a maximum
7) Konvexnost, konkávnost
8) Inflexní body
9) Asymptoty

ŘEŠENÍ :

1) $D_f = R$ funkce je definována pro každé reálné číslo

2) Protože je funkce definovaná na celé množině R, je spojitá a nemá žádné body nespojitosti

3) Průsečíky s osami vypočítáme tak, že do rovnice funkce vždy za jednu proměnnou dosadíme 0.

   P_y : $x = 0$, pak $y = 0 – 0 + 8 = 8$, tedy $P_y = [\ 0;8\ ]$

   P_x : $y = 0$, pak řešíme bikvadratickou rovnici $x^4 – 6\,x^2 + 8 = 0$,

   pomocí substituce : $x^2 = z$, dostaneme rovnici $z^2 – 6z + 8 = 0$, jejíž řešení je :

   $z_1 = 2$, $z_2 = 4$

   Zpětným dosazením do substituce dostaneme pak kořeny původní rovnice :

   $$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$
   $$x_{3,4} = \pm 2$$

Takže dostáváme celkem 4 průsečíky funkce s osou x :

$$P_{x1} = \left[\sqrt{2},0\right]$$
$$P_{x2} = \left[-\sqrt{2},0\right]$$
$$P_{x3} = \left[2,0\right]$$
$$P_{x4} = \left[-2,0\right]$$

4) Stacionární body (body podezřelé z extrému) jsou nulové body 1.derivace :

$y = x^4 - 6x^2 + 8$
$y´= 4x^3 - 12x$
$y´´= 12x^2 - 12$

Takže vytvoříme rovnici : $4x^3 - 12x = 0$

Řešení této rovnice jsou stacionární body :

$$x_1 = 0$$
$$x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$$

Nyní v těchto bodech ověříme existenci lokálního extrému pomocí 2.derivace :

y´´(0)= 12.0 – 12 = -12 ……..nastává maximum
y´´(dosadit 2 zbývající stac. body) = 12.3 – 12 = 24……….nastává minimum

5) Intervaly monotónnosti, v nichž je funkce rostoucí nebo klesající určíme pomocí lokálních extrémů :

a) Rostoucí :

$$\left(-\sqrt{3},0\right) a \left(\sqrt{3},\infty\right)$$

b) Klesající :

$$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right) a \left(0,\sqrt{3}\right)$$

6) Souřadnice lokálních extrémů vypočítáme dosazením stacionárních bodů, v nichž byl potvrzen extrém, do rovnice funkce :

E_{max} = [0;8]

$$E_{\min 1} = \left[-\sqrt{3}, -1\right]$$
$$E_{\min 2} = \left[\sqrt{3}, -1\right]$$

7) Nejprve vypočítáme souřadnice inflexních bodů (v nichž dochází ke změně křivosti funkce) a pomocí nich pak určíme intervaly konvexnosti a konkávnosti:

Inflexní bod je nulový bod 2.derivace, takže sestavíme rovnici : $12x^2 - 12 = 0$

Jejími kořeny jsou čísla 1 a -1.

Souřadnice inflexních bodů získáme opět dosazením těchto kořenů do rovnice funkce :
I_1 = [1; 3] , I_2 = [-1;3]

8) Intervaly konvexnosti : (-∞;-1) a (1;∞)
Interval konkávnosti : (-1; 1)

9) a) asymptoty bez směrnice funkce nemá, protože $D_f = R$ a funkce je proto spojitá

b) asymptoty se směrnicí jsou přímky tvaru : y = a x + b, jejichž koeficienty <u>a,b</u> vypočítáme pomocí vzorce :

$$a = \lim \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{x^4 - 6x^2 + 8}{x} = \lim(x^3 - 6x + \frac{8}{x}) = \lim x^3.(1 - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^4}) = \infty$$

Poznámka :
tato limita je vypočtena pro x blížící se do +∞, stejně bychom počítali limitu v -∞, která by opět měla nevlastní hodnotu -∞.

Protože tato limita není vlastní (nemá konkrétní číselnou hodnotu), neexistuje žádný koeficient <u>a</u> pro případnou asymptotu, a proto daná funkce nemá ani asymptoty se směrnicí.

10) A nyní můžeme, za pomoci souřadnic všech výše uvedených bodů a mezí všech získaných intervalů, tzv. přibližně přesně nakreslit graf funkce.