Posloupnosti

Definice posloupnosti

- Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina N všech přirozených čísel, se nazývá nekonečná posloupnost.

- Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel $n \leq n_0$ kde n_0 je pevně dané číslo z N, se nazývá konečná posloupnost.

Zápis posloupnosti

- Posloupnost (nekonečnou) zapisujeme

$$\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$$

Posloupnost konečnou zapisujeme

$$\left(a_n\right)_{n=1}^{k}$$

nebo (a_1 , a_2 , …, a_k).

Členy posloupnosti

- Funkční hodnoty posloupnosti se nazývají členy posloupnosti; funkční hodnota posloupnosti v bodě n є N se nazývá n-tý člen posloupnosti a značí se a_n.
- tj. a_1 první člen

  a_2 druhý člen

  .

  a_n n-tý člen

Určení posloupnosti

1. Výčtem prvků – z uvedení několika prvních členů vyplývá, jak utvoříme další členy

Příklady:

1 , 2 , 3 , 4, ...

2 , 4 , 6, 8 , . . .

2 , 4 , 8 , 16 , . . .

5 , 5 , 5 , 5 , . . .

Určení posloupnosti

2. Vzorcem pro n-tý člen – jednotlivé členy posloupnosti vypočítáme dosazením do vzorce

Příklad :

Určete prvních pět členů posloupnosti :

$a_n = 7n - 5$

$a_1 = 2 \quad a_2 = 9 \qquad a_3 = 16$

$a_4 = 23 \qquad a_5 = 30$

Určení posloupnosti

3. Rekurentním vzorcem – je určen první člen nebo několik prvních členů a vzorec, který udává, jek se vypočítá kterýkoli člen posloupnosti pomocí členů předcházejících.

   Příklad : Napište prvních pět členů posloupnosti dané rekurentně :

   $a_1 = 3 \quad , \quad a_{n+1} = 2a_n - 1 .$

   $a_2 = 2a_1 - 1 = 2 . 3 - 1 = 5$

   $a_3 = 2a_2 - 1 = 2 . 5 - 1 = 9$

   $a_4 = 2a_3 - 1 = 2 . 9 - 1 = 17$

   $a_5 = 2a_4 - 1 = 2 .17 - 1 = 33$

Určení posloupnosti

4. Graficky – grafem posloupnosti je vždy množina navzájem izolovaných bodů. Posloupnost můžeme znázornit graficky buď v soustavě souřadnic nebo na přímce.

Vlastnosti posloupností

Monotónnost posloupnosti

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá rostoucí, právě když pro všechna n є N platí : $a_{n+1} > a_n$

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá klesající, právě když pro všechna n є N platí : $a_{n+1} < a_n$

Vlastnosti posloupností

Pro zjišťování, zda je posloupnost rostoucí nebo klesající, je vhodné použít tuto pomůcku, která vyplývá z uvedených definic :

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá rostoucí, právě když pro všechna n є N platí : $a_{n+1} - a_n > 0$

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá klesající, právě když pro všechna n є N platí : $a_{n+1} - a_n < 0$

Vlastnosti posloupností

Příklad :

Zjistěte, zda je posloupnost rostoucí či klesající :

$$\left(2+n\right)_{n=1}^{\infty}$$

$a_n = 2 + n \quad a_{n+1} = 2 + (n+1) = n + 3$

$a_{n+1} - a_n = 3 + n - (2 + n) = 1 > 0 \rightarrow$ daná

posloupnost je rostoucí

Vlastnosti posloupností

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá neklesající, právě když pro všechna n є N platí : $a_{n+1} \geq a_n$

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá nerostoucí, právě když pro všechna n є N platí : $a_{n+1} \leq a_n$

Vlastnosti posloupností

Omezenost posloupnosti

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá shora omezená, právě když existuje reálné číslo h takové, že pro všechna n є N je :

$$a_n \leq h$$

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá zdola omezená, právě když existuje reálné číslo d takové, že pro všechna n є N je :

$$a_n \geq d$$

Posloupnost se nazývá omezená, právě když je shora omezená a zdola omezená.

Vlastnosti posloupností

Příklad : Rozhodněte, zda je daná posloupnost omezená shora a zdola. Svoje tvrzení dokažte. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Vypíšeme několik členů dané posloupnosti : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$

Hodnoty členů se snižují, zdá se tedy, že posloupnost je omezena shora číslem 1 . Dokážeme :

$$\frac{1}{n} \leq 1 \;/\; .n \; \varepsilon N$$

$$1 \leq n$$

Nerovnici jsme řešili v množině přirozených čísel a pro každé přirozené číslo n platí $n \geq 1$, nerovnice je tedy splněna pro všechna přirozená čísla a posloupnost je shora omezená.

Vlastnosti posloupností

Hodnoty členů se snižují, zdá se tedy, že posloupnost je omezena zdola číslem 0 . Dokážeme :

$$\frac{1}{n} \geq 0 \quad / \; .n \; \varepsilon N$$

$$1 \geq 0$$

Úpravou nerovnice jsme dospěli k pravdivému výroku. Nerovnice je tedy splněna pro všechna přirozená čísla a posloupnost je zdola omezená.

Závěr : Daná posloupnost je omezená zdola i shora je tedy omezená .

Aritmetická posloupnost

Definice :

Aritmetická posloupnost je posloupnost čísel, ve které rozdíl libovolného členu s členem předcházejícím je konstantní číslo zvané diference – d.

Vzorce :

Rekurentní vzorec: $a_{n+1} = a_n + d$

Vzorec pro n-tý člen : $a_n = a_1 + (n - 1)d$

Vzorec pro libovolné dva členy r, s є N : $a_r = a_s + (r - s)d$

Aritmetická posloupnost

Vzorec pro součet prvních n členů : $$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Příklady:

1. V aritmetické posloupnosti je dáno : $a_1 = -4$, $d = 3$. Určete prvních pět členů a dále určete dvacátý člen.

a) Pro výpočet a_2 až a_5 použijeme rekurentní vzorec : $a_{n+1} = a_n + d$

$a_2 = a_1 + d = -4 + 3 = -1$

$a_3 = a_2 + d = -1 + 3 = 2$

$a_4 = a_3 + d = 2 + 3 = 5$

$a_5 = a_4 + d = 5 + 3 = 8$

Aritmetická posloupnost

b) Pro výpočet a_{20} použijeme vzorec pro výpočet n-tého členu:
$a_n = a_1 + (n – 1)d$ tj. $a_{20} = a_1 + (20 – 1)d$
$a_{20} = -4 + 19 . 3 = -4 + 57 = 53$

2. V aritmetické posloupnosti je dáno : $a_6 = 9$, $a_{17} = 20$. Určete s_{200}.
   a) pro výpočet diference použijeme vzorec pro dva libovolné členy :

$$a_r = a_s + (r - s)d$$
$$a_{17} = a_6 + (17 – 6)d$$
$$20 = 9 + 11d$$
$$\underline{d = 1}$$

Aritmetická posloupnost

b) pro výpočet prvního členu použijeme vzorec pro výpočet n-tého členu: $a_n = a_1 + (n – 1)d$

$a_6 = a_1 + (6 – 1)d$

$9 = a_1 + 5 . 1$

$\underline{a_1 = 4}$

c) pro výpočet dvoustého členu použijeme opět vzorec pro výpočet n-tého členu: $a_n = a_1 + (n – 1)d$

$a_{200} = a_1 + (200 – 1)d$

$a_{200} = 4 + 199 . 1$

$\underline{a_{200} = 203}$

Aritmetická posloupnost

d) Pro výpočet s_{200} použijeme vzorec

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$s_{200} = \frac{200}{2}(a_1 + a_{200})$$

$$s_{200} = 100(4 + 203)$$

$$\underline{s_{200} = 20\,700}$$

Aritmetická posloupnost

3. Určete, kolik prvních členů aritmetické posloupnosti dává součet 132, je-li $a_4 = 15$, $d = 3$.

Řešení :

a) pro výpočet prvního členu použijeme vzorec pro výpočet n-tého členu:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_4 = a_1 + 3d$$

$$15 = a_1 + 3 \cdot 3$$

$$\underline{a_1 = 6}$$

Aritmetická posloupnost

b) ze vzorce pro n-tý člen vyjádříme a_n a dosadíme do vzorce pro součet prvních n členů

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_n = 6 + (n-1).\,3$$
$$a_n = 6 + 3n - 3$$
$$\underline{a_n = 3 + 3n}$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + 3 + 3n)$$
$$132 = \frac{n}{2}(6 + 3 + 3n)$$
$$264 = n(9 + 3n)$$
$$264 = 9n + 3n^2$$
$$3n^2 + 9n - 264 = 0$$
$$n^2 + 3n - 88 = 0$$

vyřešíme kvadratickou rovnici $n^2 + 3n - 88 = 0$

získáváme řešení $\underline{n_1 = 8}$ a $n_2 = -11$, protože $n \in N$, řešení n_2 nevyhovuje. Součet prvních osmi členů je 132.

Aritmetická posloupnost

4. Určete prvních pět členů aritmetické posloupnosti, ve které platí :

$$a_3 + a_{12} + 8 = 0$$

$$a_8 + a_1 - a_4 = 1$$

Řešení :

v dané soustavě rovnic vyjádříme každý člen na levé straně pomocí prvního členu posloupnosti a_1 a diference d (použijeme vzorec pro n-tý člen posloupnosti)

$$a_1 + 2d + a_1 + 11d + 8 = 0$$

$$\underline{a_1 + 7d + a_1 - a_1 - 3d = 1}$$

$$2a_1 + 13d + 8 = 0$$

$$\underline{a_1 + 4d = 1}$$

Řešením soustavy rovnic je $\underline{d = -2}$, $\underline{a_1 = 9}$

Prvních pět členů posloupnosti : 9 , 7 , 5 , 3 , 1 .

Užití aritmetické posloupnosti

1. Část střechy domu má tvar lichoběžníku a je ji třeba pokrýt taškami. Víme, že do řady u hřebenu se vejde 85 tašek, do spodní řady při okapu 102 tašek. Přitom tašky budou srovnány do řad tak, že v každé následující řadě bude o jednu tašku více než v řadě předchozí. Kolik je třeba tašek na pokrytí části střechy ?

Řešení :

Počty tašek v jednotlivých řadách tvoří první členy aritmetické posloupnosti s diferencí rovnou jedné. tzn.

$a_1 = 85$, $a_n = 102$, $d = 1$ $\rightarrow$ dosadíme do vzorce pro součet prvních n členů

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Užití aritmetické posloupnosti

neznáme n (které vyjadřuje počet řad) k výpočtu využijeme vzorec

$a_n = a_1 + (n - 1)d$

$102 = 85 + (n - 1) \cdot 1$

$n = 18$ → dosadíme do vzorce

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$s_n = \frac{18}{2}(85 + 102)$$

$$s_n = 1683$$

Na pokrytí příslušné části střechy je třeba 1 683 tašek.

Užití aritmetické posloupnosti

2. Velikosti stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Určete velikosti odvěsen tohoto trojúhelníku, jestliže přepona má délku 30 cm.

Řešení :

a) vyjádříme strany trojúhelníku jako tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti tj. $c = 30$ cm, $a = 30 – d$, $b = 30 – 2d$

b) pro strany trojúhelníku ABC použijeme Pythagorovu větu

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$30^2 = (30 – d)^2 + (30 - 2d)^2$$

$$900 = 900 - 60d + d^2 + 900 – 120d + 4d^2$$

$$5d^2 – 180d + 900 = 0$$

$$\underline{d^2 – 36d + 180 = 0}$$

Užití aritmetické posloupnosti

Řešení kvadratické rovnice jsou $d_1 = 30$ $d_2 = 6$

Řešení $d_2 = 6$ nevyhovuje zadání příkladu tzn. $\underline{d = 6}$

Strany trojúhelníku ABC mají tedy velikosti :

$\underline{c = 30\text{cm},\ a = 24\text{ cm},\ b = 18\text{ cm}}$.

Geometrická posloupnost

Definice :

Geometrická posloupnost je posloupnost čísel, ve které podíl libovolného členu s členem předcházejícím je konstantní číslo zvané kvocient – q.

Vzorce :

Rekurentní vzorec: $a_{n+1} = a_n \cdot q$

Vzorec pro n-tý člen : $a_n = a_1 q^{n-1}$

Vzorec pro libovolné dva členy r, s є N : $a_r = a_s \cdot q^{r-s}$

Geometrická posloupnost

Vzorec pro součet prvních n členů : $q = 1 \quad s_n = a_1 \cdot q$

$$q \neq 1 \Rightarrow s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Příklady:

1. Určete první čtyři členy geometrické posloupnosti a dále určete desátý člen a součet prvních osmi členů, je-li dáno : a1 = -4 , q = ½ .

   Řešení :

   a) Pro výpočet a_2 až a_4 použijeme rekurentní vzorec : $a_{n+1} = a_n \cdot q$

Geometrická posloupnost

$a_2 = a_1 . q = -4 . ½ = -2$

$a_3 = a_2 . q = -2 . ½ = -1$

$a_4 = a_3 . q = -1 . ½ = -½$

b) Pro výpočet a_{10} použijeme vzorec pro výpočet n-tého členu: $a_n = a_1 . q^{n-1}$

$a_{10} = a_1 . q^{10-1}$

$a_{10} = -4 . (½)^9$

$$a_{10} = -\frac{1}{128}$$

Geometrická posloupnost

c) pro výpočet součtu prvních osmi členů použijeme vzorec :

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_8 = -4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$s_8 = -4 \cdot \frac{\frac{1}{256} - 1}{-\frac{1}{2}}$$

$$s_8 = -\frac{255}{32}$$

Geometrická posloupnost

2. V geometrické posloupnosti je dáno : $a_3 = 18$, $a_5 = 162$. Určete součet prvních osmi členů.

Řešení :

a) ze vzorce pro dva libovolné členy určíme kvocient

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$

$$a_5 = a_3 \cdot q^2$$

$$162 = 18 \cdot q^2$$

$$9 = q^2$$

$$|q| = 3 \rightarrow \underline{q_1 = 3 ,\ q_2 = -3}$$

tj. získáváme dvě posloupnosti 1. posloupnost pro $q = 3$

2. posloupnost pro $q = -3$

Geometrická posloupnost

b) ze vzorce pro n-tý člen vypočítáme pro obě posloupnosti a_1:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$a_3 = a_1 \,.\, q^2$$

$$18 = a_1 \,.\, 9$$

$$\underline{a_1 = 2}$$

c) Ze vzorce pro součet prvních osmi členů vypočítáme součet 1. posloupnosti tj. pro $q = 3$

$$s_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_8 = 2 . \frac{3^8 - 1}{3 - 1} = 2 . \frac{6561 - 1}{2} = 6560$$

Geometrická posloupnost

d) Ze vzorce pro součet prvních osmi členů vypočítáme součet 2. posloupnosti tj. pro q = -3

$$s_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_8 = 2 . \frac{(-3)^8 - 1}{-3 - 1} = 2 . \frac{6561 - 1}{-4} = -3280$$

3. V geometrické posloupnosti platí : $a_2 - a_4 = 60$

$a_1 - a_3 = 15$

Určete a_1 , q .

Geometrická posloupnost

Řešení :

V soustavě rovnic vyjádříme členy a_2 až a_4 pomocí prvního členu a kvocientu a provedeme úpravy pomocí vytýkání. Pak z druhé rovnice vyjádříme a1 a dosadíme do první rovnice a vypočítáme kvocient. a_1 dopočítáme dosazením do vyjádření.

$$a_1q - a_1q^3 = 60$$

$$\underline{a_1 - a_1q^2 = 15}$$

$$a_1q(1 - q^2) = 60$$

$$\underline{a_1(1 - q^2) = 15} \quad \rightarrow \quad a_1 = 15/(1 - q^2)$$

$$\underline{q = 4} \qquad \underline{a_1 = -1}$$

Užití geometrické posloupnosti

1. Pravidelný přírůstek nebo úbytek

označíme :

a_0 – počáteční hodnota

a_n – hodnota po n obdobích

n – počet období

p – procenta

pravidelný přírůstek o p %

$$a_n = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

pravidelný pokles o p %

$$a_n = a_0\left(1-\frac{p}{100}\right)^n$$

Užití geometrické posloupnosti

Příklady :

1. Hodnota roční výroby podniku je 2 miliony Kč. Průměrný roční přírůstek činí 2%. Jaká bude hodnota výroby na konci pátého roku?

označíme : $a_0 =$ 2 miliony Kč

$p = 2\%$

$n = 5$ let

dosadíme do vzorce pro pravidelný přírůstek

$$a_n = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

$$a_5 = 2000000\left(1+\frac{2}{100}\right)^5$$

$$a_5 = 2000000.1{,}10408$$

$$a_5 = 2208161{,}606$$

Užití geometrické posloupnosti

2. Ve městě každoročně přibývá průměrně 4,5% obyvatel. Za jak dlouho lze očekávat, že se počet obyvatel zvýší o 30% ?

   označíme : $a_n = a_0 + 0{,}30a_0 = 1{,}3a_0$

   $\underline{p = 4{,}5\%}$

   dosadíme do vzorce pro pravidelný přírůstek :

$$a_n = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$1{,}3a_0 = a_0\left(1 + \frac{4{,}5}{100}\right)^n \quad / : a_0$$

$$1{,}3 = 1{,}045^n \quad / \log \quad \textit{aritmujeme}$$

$$\log 1{,}3 = \log 1{,}045^n$$

$$\log 1{,}3 = n \,.\, \log 1{,}045$$

$$n = \frac{\log 1{,}3}{\log 1{,}045}$$

$$n = 5{,}96$$

Užití geometrické posloupnosti

2. Úrokování vkladů
   - kapitál (K) nebo jistina (j) = půjčená nebo vložená částka
   - úrok (ú) = výše odměny vyjádřená v procentech
   - úroková míra (p) - udává , kolik procent z jistiny činí úrok za jedno úrokovací období
   - úrokovací období – může být roční (p.a.) , pololetní (p.s.), čtvrtletní (p.q.)
   - úrokovací doba (t) = skutečná doba, na kterou je poskytnuta půjčka nebo vložen vklad
   - daň z úroku (d) - odvádí banka státu

Užití geometrické posloupnosti

Výpočet dnů úrokovací doby

Využíváme tyto zásady :

a) každý úrokovací měsíc má 30 dnů

b) úrokovací rok má 360 dnů

c) ze dvou hraničních dnů (den vkladu a výběru) se započítává pouze jeden den

d) počet dnů (t) úrokovací doby se vypočítá podle vzorce

$$t = (m_2 – m1).30 + (d_2 – d_1)$$

m_2 – měsíc výběru vkladu nebo splacení půjčky

m_1 – měsíc vkladu nebo zřízení půjčky

d_1 - den vkladu nebo zřízení půjčky

d_2 - den výběru vkladu nebo splacení půjčky

Užití geometrické posloupnosti

Předpoklad :

1. Daň z úroku je 15%
2. Vkladatel celý vklad i s úroky ponechává po celou dobu v peněžním ústavu a dalšími vklady ho nezvyšuje

Jednoduché úrokování

- Úrok se vypočítává na konci každého úrokovacího období z původní vložené částky
- Vzorec : $K_n = K_0(1 + k. t/360 . p/100)$

k = zdaňovací koeficient   např.: při dani z úroku 15% k = 0,85

Užití geometrické posloupnosti

Příklad:

Pan Novák uložil dne 27. 1. na vkladní knížku bez výpovědní lhůty částku 52 000 Kč . Dne 14. 9. peníze vyzvedl. Banka úročila vklad v den výběru, úroková míra je 2,1% , daň z úroku je 15% . Kolik korun pan Novák obdržel ?

Řešení:

a) Výpočet dnů úrokovací doby: $t = (m_2 – m1).30 + (d_2 – d_1)$

$t = (9 – 1). 30 + (14 - 27)$

$t = 8 . 30 – 13 = 240 – 13$

$t = 227$ dnů

Užití geometrické posloupnosti

b) Výpočet vyplacené částky : $t = 227$ dnů

$p = 2{,}1\%$

$k = 0{,}85$

$\underline{K_0 = 52\,000 \text{ Kč}}$

$$K_n = K_0(\,1 + k.\ t/360\ .\ p/100\,)$$

$$K_n = 52\,000(1 + 0.85.\ 227/360\ .\ 2{,}1/100)$$

$$K_n = 52\,000\ .\ 1{,}0112554$$

$$\underline{K_n = 52\,585{,}28 \text{ Kč}}$$

Užití geometrické posloupnosti

Složené úrokování

- Úroky se přičítají k počátečnímu kapitálu a spolu sním se dále úročí
- Vzorec : $K_n = K_0(1 + k. p/100)^n$

Příklad:

Podnikatel si uložil 100 000 Kč do banky na termínovaný vklad na 3 roky s ročním úrokem 14%. Úrokovací období je čtvrt roku, daň z úroků je 15%. Jakou částku bude mít v bance, nebude-li vybírat vklad ani úroky?

Užití geometrické posloupnosti

Řešení:

a) výpočet úrokovacích období – n

úrokovací období je čtvrt roku tzn. za 3 roky je $n = 4 \,.\, 3 = 12$

b) výpočet úrokové míry - p

14% je roční úrok tzn. Přepočítáme ho na úrokovací období čtvrt roku tj. $p = 14\% : 4 = 3{,}5\%$

c) zdaňovací koeficient $k = 0{,}85$

d) dosadíme do vzorce pro složené úročení :

$$K_n = K_0 (1 + k .\, p/100)^n$$

$$K_{12} = 100\,000 (1 + 0{,}85 .\, 0{,}035)^{12}$$

$$K_{12} = 100\,000 \,.\, 1{,}4216137$$

$$K_{12} = 142\,161{,}37 \text{ Kč}$$