Analytická geometrie lineárních útvarů v rovině

- Rovnice přímky v rovině
- Vzájemná poloha přímek v rovině
- Odchylka přímek v rovině
- Vzdálenost bodu od přímky v rovině

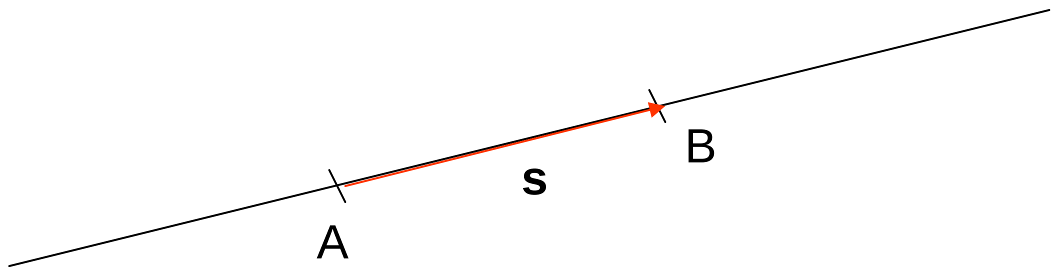
Rovnice přímek v rovině

- Parametrické rovnice přímky
- Obecná rovnice přímky
- Směrnicový tvar rovnice přímky

Parametrické rovnice přímky

Každé dva různé body A, B určují přímku, kterou označujeme AB.

Vektor **s** = B – A se nazývá směrový vektor přímky AB .



Směrový vektor přímky

- Přímku můžeme určit pomocí nekonečného počtu dvojic bodů, proto má přímka nekonečně mnoho směrových vektorů a všechny jsou kolineární (navzájem rovnoběžné).
- Každý směrový vektor je nenulovým násobkem jiného směrového vektoru.
- Směrový vektor každé přímky je nenulový

Odvození parametrických rovnic přímky

- Přímka může být jednoznačně určena :

  1. dvěma body

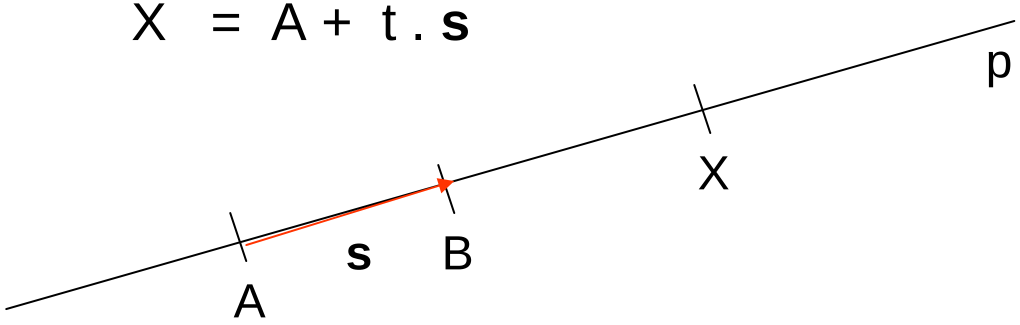
  2. jedním bodem a směrovým vektorem

Přímku p určíme bodem A [a_1 ; a_2] a směrovým vektorem **s** = (s_1; s_2). Pro libovolný bod X [x ; y] ležící na přímce p platí :

$$X - A = t \cdot (B - A)$$

$$X - A = t \cdot \mathbf{s}$$

$$X = A + t \cdot \mathbf{s}$$



Parametrické rovnice přímky

Rovnice

$$X = A + t \cdot \mathbf{s} \quad ; \quad t \in R$$

se nazývá parametrická rovnice přímky

(parametrické vyjádření přímky) určené bodem A a vektorem **s** .Proměnná t se nazývá parametr.

Parametrická rovnice přímky vyjádřená v souřadnicích

$\underline{X = A + t \cdot \mathbf{s}}$; $t \in R$

$$x = a_1 + ts_1$$
$$y = a_2 + ts_2 \quad , t \in R$$

Příklady

- Napište parametrické rovnice přímky, která je určena :

a) bodem A [-1; 4] a směrovým vektorem

s = (2 ; -5)

b) body A [-3; 4] , B [2; -1]

Řešené příklady

Zjistěte, zda body A [3 ; -1] , B [-4; 5] leží na přímce p, která má parametrické vyjádření : $x = 2 - 3t$

$y = 1 + 2t$, $t \in R$.

Řešení

- souřadnice bodu A dosadíme do parametr. rovnice přímky p, tzn.

$3 = 2 - 3t \rightarrow t = -1/3$

$-1 = 1 + 2t \rightarrow t = -1$

parametr t se liší z každé rovnice svou hodnotou tzn. bod A neleží na přímce p

- souřadnice bodu B dosadíme do parametr. rovnice přímky p, tzn.

$-4 = 2 - 3t \rightarrow t = 2$

$5 = 1 + 2t \rightarrow t = 2$

hodnota parametru je u obou rovnic stejná, tzn. bod B leží na přímce p

Příklady

1. Napište parametrické rovnice přímek, na kterých jsou strany trojúhelníku s vrcholy A, B , C, je-li :
   a) A [-7 ; 4] , B [3 ; 2] , C [-1 ; 4]
   b) A [2 ; -5] , B [-1 ; -2] , C [-3 ; 2]

2. V trojúhelníku ABC určete parametrické rovnice těžnic, je-li:
   a) A [-1 ; 2] , B [3 ; 6] , C [-5 ; 4]
   b) A [2 ; 3] , B [-4 ; 7] , C [4 ; 0]

<u>Obecná rovnice přímky</u>

Rovnice

$$ax + by + cz = 0 ,$$

kde aspoň jedno z čísel a , b je nenulové, se nazývá <u>obecná rovnice přímky.</u>

Převod parametrické rovnice přímky na obecnou rovnici

Napište obecnou rovnici přímky, která je určena body A [-2 ; 7] , B [3 ; 4].

Řešení

1. napíšeme parametrické rovnice přímky AB : **s** = B – A = (5 ; -3)

$x = -2 + 5t \quad / \,.\, 3$

$y = 7 - 3t \quad / \,.\, 5$

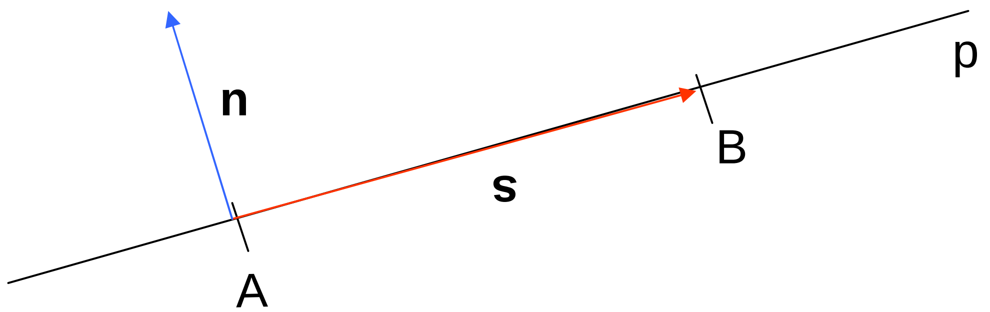
2. rovnice vhodně vynásobíme a sečteme je, abychom ze součtu vyloučili paramatr t

$3x + 5y = 29$

$3x + 5y - 29 = 0$

Normálový vektor

Vektor kolmý ke směrovému vektoru přímky se nazývá normálový vektor této přímky.



Vlastnosti normálového vektoru

1. Směrový a normálový vektor přímky jsou navzájem kolmé, tzn. $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0$
2. Souřadnice normálového vektoru určíme z obecné rovnice přímky $ax + by + cz = 0$

   $\mathbf{n} = (a ; b)$

3. Vztah mezi souřadnicemi směrového a normálového vektoru přímky :

   je-li $\mathbf{s} = (a ; b)$,pak $\mathbf{n} = (-b ; a)$ nebo $\mathbf{n} = (b ; -a)$

   tzn. souřadnice normálového vektoru získáme ze směrového vektoru tak, že je zaměníme a u jedné ze souřadnic změníme znaménko

Příklady

1. Určete směrový a normálový vektor přímky :

   a) $3x - 5y + 7 = 0$

   b) $4x - 6y - 12 = 0$

2. Zjistěte, zda na přímce $2x - 3y + 6 = 0$ leží body : $A [3; 2]$, $B [0; 2]$

Řešený příklad

Napište obecnou rovnici přímky dané dvěma body A [-2; 3] ,
B [1; -4] .

Řešení

1. určíme souřadnice směrového vektoru **s** = B – A = (3 ; -7)
2. určíme souřadnice normálového vektoru **n** = (7 ; 3)
3. souřadnice normálového vektoru dosadíme do obecné rovnice přímky tj. $7x + 3y + c = 0$
4. do získané obecné rovnice přímky dosadíme souřadnice bodu A nebo B a vypočítáme hodnotu koeficientu c tj.

$$7x + 3y + c = 0$$

$$7 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + c = 0$$

$$-14 + 9 + c = 0$$

$$\mathbf{c = 5}$$

obecná rovnice přímky AB : $7x + 3y + 5 = 0$

Příklady

1. Napište obecnou rovnici přímky určené dvěma body :
   a) A [3; -3] , B [1; 7]
   b) A [5; 0] , B [-1; 6]

2. Určete obecnou rovnici přímky, která je dána bodem a směrovým vektorem:
   a) A [7; -2] , s = (-1 ; 1)
   b) B [- 3; 0] , B [-1; 6]

1. domácí úkol

Napište obecné rovnice stran a těžnic trojúhelníku s vrcholy

A [2; - 5] , B [0; 3] , C [- 4; 1] .

Směrnicový tvar rovnice přímky

Rovnice

$$y = kx + q$$

Se nazývá směrnicový tvar rovnice přímky.

Číslo k se nazývá směrnice přímky.

Odvození směrnicového tvaru přímky

Směrnicový tvar rovnice přímky odvodíme z obecné rovnice přímky:

ax + by + c = 0

by = - ax – c   vydělíme b

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

označíme $k = -\frac{a}{b}$ $q = -\frac{c}{b}$