Analytická geometrie

- -Vektorová algebra
- -Analytická geometrie lineárních útvarů v rovině a prostoru
- -Analytická geometrie kvadratických útvarů (kuželosečky)

Vektorová algebra

- Soustava souřadnic
- Vzdálenost dvou bodů
- Vektor a jeho velikost
- Operace s vektory
- Skalární součin dvou vektorů
- Odchylka dvou vektorů
- Lineární závislost a nezávislost vektorů

Soustava souřadnic

Soustavu souřadnic zavádíme takto:

1. Zvolíme počátek soustavy souřadnic 0.
2. Počátkem 0 vedeme přímky, které nazýváme osy souřadnic x, y, z.
3. Osy zorientujeme, tj. určíme kladný a záporný směr os od počátku 0. Tím se osy rozdělí na kladnou část a zápornou část (poloosu).Kladné poloosy označujeme obvykle šipkou.
4. Zvolíme jednotky na osách.

Využijeme kartézskou soustavu souřadnic , ve které jsou osy navzájem kolmé a na všech osách mají stejné jednotky.

Soustava souřadnic

Podle počtu zavedených souřadnic rozlišujeme:

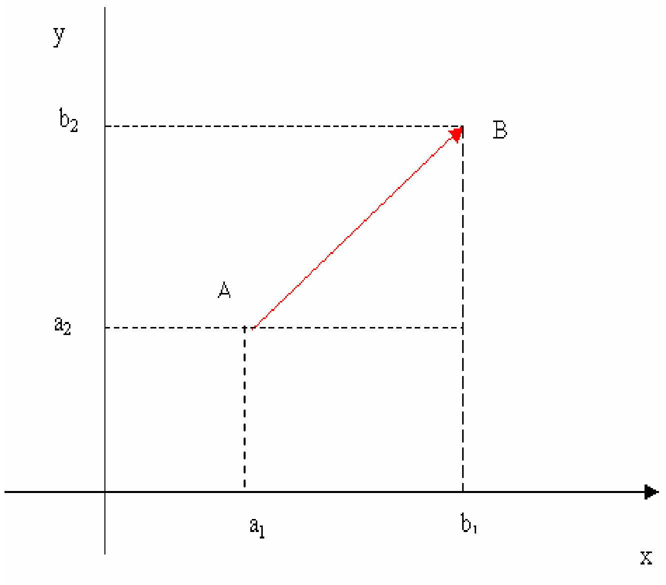
Prostor na přímce E_1 – jednorozměrný prostor – jedna osa x
Prostor v rovině E_2 - dvojrozměrný prostor - dvě osy x, y
Prostor, v němž žijeme, E_3 - trojrozměrný prostor - tři osy x, y , z

Bodu A pak přiřazujeme souřadnice takto:

- v E_1 číslo představuje jeho souřadnici - zapíšeme $A [x_A]$
- v E_2 uspořádanou dvojici tj. dvě souřadnice x_A , y_A - zapíšeme $A [x_A , y_A]$
- v E_3 uspořádanou trojici tj tři souřadnice x_A , y_A , z_A – zapíšeme $A [x_A , y_A , z_A]$

Vzdálenost dvou bodů v rovině

- **Pomocí souřadnic bodů můžeme vypočítat jejich vzdálenost, která je rovna délce úsečky AB.**
- **Body A, B mají souřadnice A [a_1; a_2] , B [b_1; b_2] .**
- **Jaké souřadnice má bod C?**
- **Souřadnice bodu C určíme z obrázku tj. C [b_1; a_2], stejně jako souřadnice úseček AC a BC.**
- **$| AC | = | b_1 - a_1 |$ $| BC | = | b_2 - a_2 |$**
- **Podle Pythagorovy věty platí :**
- **$| AB | = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$**
- **tj. vzdálenost dvou bodů v rovině**



Řešené příklady

1. Vypočítejte vzdálenost bodů K [5 ; 7] a L [2 ; 11].

Řešení :

$$|KL| = \sqrt{(2-5)^2 + (11-7)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \underline{5}$$

2. Jsou dány body A [1 ; 3], B [-1 ; x]. Určete číslo x tak, aby $|AB| = \sqrt{5}$.

Řešení:

$$|AB| = \sqrt{(-1-1)^2 + (x-3)^2}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{(-2)^2 + (x-3)^2} \qquad /\,^2$$

$$5 = 4 + x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\underline{x = 4} \qquad \underline{x = 2}$$

Řešené příklady

3. Dokažte, že trojúhelník o vrcholech A = [0 ; 0] , B [3 ; 1] , C [1 ; 7] je pravoúhlý.

Řešení:

1. **vypočítáme délky stran trojúhelníku**

$$| AB | = \sqrt{(3 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{10}$$

$$| BC | = \sqrt{(1 - 3)^2 + (7 - 1)^2} = \sqrt{40}$$

$$| AC | = \sqrt{(1 - 0)^2 + (7 - \ )^2} = \sqrt{50}$$

2. **využijeme Pythagorovu větu** (nejdelší strana je přepona)

$$| AC |^2 = | AB |^2 + | BC |^2$$

$$50 = 10 + 40$$

$$50 = 50$$

tzn. trojúhelník je pravoúhlý

Vzdálenost dvou bodů v prostoru

- Vzdálenost bodů A [a_1, a_2, a_3] a B [b_1 , b_2 , b_3] v prostoru je dána vzorcem

$$| AB | = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Příklady na procvičení

1. Vypočítejte vzdálenost bodů

   a) A [1 ; 2 ; 3] , B [0 ; -2 ; 1]

   b) C [-2 ; 1 ; 3] , D [0 ; -1 ; 2]

2. Vypočítejte obvod trojúhelníku ABC o vrcholech

   A [-4 ; 2] , B [0 ; -1] , C [3 ; 3] .

1. domácí úkol

1. Dokažte, že trojúhelník PQR, P [2 ; 0] , Q [-1 ; $3\sqrt{3}$] , R [5 ; $3\sqrt{3}$] je rovnostranný.

2. Na ose y nalezněte bod M, který má stejnou vzdálenost od počátku 0 i od bodu A [-8 ; -4].

Střed úsečky

- Střed S úsečky AB dělí úsečku na dvě stejné části.

- Střed úsečky AB v rovině

  Pro střed S [s_1 ; s_2] úsečky AB, kde A [a_1 ; a_2] , B [b_1 ; b_2] platí :

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \qquad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

- Střed úsečky AB v prostoru

  Pro střed S [s_1 ; s_2 ; s_3] úsečky AB, kde A [a_1 ; a_2 ; a_3] , B [b_1 ; b_2 ; b_3] platí :

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \qquad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \qquad s_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}$$

Příklady na procvičení

1. Jsou dány body A, B. Vypočítejte souřadnice středu S úsečky AB
   a) A [3 ; -2] , B [5 ; 4]
   b) A [0 ; 5] , B [-3 ; -3]
   c) A [1 ; -1 ; 2] , B [0 ; 3 ; 1]
   d) A [1 ; -3 ; -1] , B [2 ; 5 ; 1]

Řešený příklad

- Vypočítejte délky těžnic t_a , t_b , t_c v trojúhelníku ABC, kde A [2 ; 4] , B [3 ; 2] , C [-1 ; -6].

Řešení

2.domácí úkol

1. Jsou dány body B , S. Vypočítejte souřadnice bodu A tak, aby bod S byl střed úsečky AB.
   a) B [1 ; 1 ; 3] , S [-1 ; 0 ; 1]
   b) B [2 ; 0 ; 1] , S [-1 ; -3 ; -2]

2. Vypočítejte délky těžnic trojúhelníku PQR,

   P [1 ; 4] , Q [-5 ; 0] , R [-3 ; -2] .

Vektor a jeho velikost

- Orientovaná úsečka AB je úsečka AB, jejíž krajní body mají určené pořadí.

Bod A se nazývá počáteční bod, bod B se nazývá koncový bod orientované úsečky.

- Graficky znázorňujeme orientovanou úsečku jako úsečku opatřenou šipkou u koncového bodu.

Zápis orientované úsečky

1. v psaném textu označíme orientovanou úsečku šipkou nad písmeny $\overrightarrow{AB}$

2. v tištěném textu označíme orientovanou úsečku tučnými písmeny

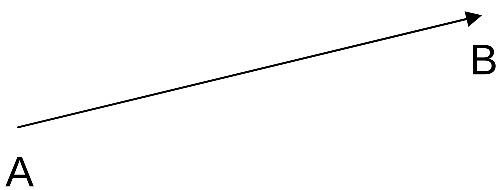
Velikost orientované úsečky

- Nulová orientovaní úsečka – je úsečka , kde počáteční a koncový bod splývají tj.

  A = B .

- Velikost orientované úsečky **AB** je rovna vzdálenosti bodů A ,B .

- Velikost nulové orientované úsečky je rovna nule.



Směr orientované úsečky

- Dvě nenulové orientované úsečky **AB** a **CD** mají stejný směr, jestliže
- - buď přímky AB a CD jsou rovnoběžné různé a body B,D leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AC
- - nebo přímky AB a CD jsou totožné a průnikem polopřímek AB a CD je opět polopřímka

Vektor

- Nenulový vektor je množina všech orientovaných úseček, které mají stejnou velikost a stejný směr.

- Nulový vektor je množina všech nulových orientovaných úseček.

Zápis vektoru

- Vektory zapisujeme malými písmeny
- \- v tištěném textu - tučně
- \- v psaném textu - označíme šipkou

Umístění vektoru

- Každou orientovanou úsečku **AB,** která představuje vektor $\vec{\mathbf{u}}$**,** nazýváme umístěním vektoru $\vec{\mathbf{u}}$.

- Zápisem **u** = B – A vyjadřujeme, že **AB**

  je umístěním vektoru **u**.

Souřadnice vektoru

- Je-li orientovaná úsečka **AB** umístěním vektoru **u**, pak mezi souřadnicemi bodu

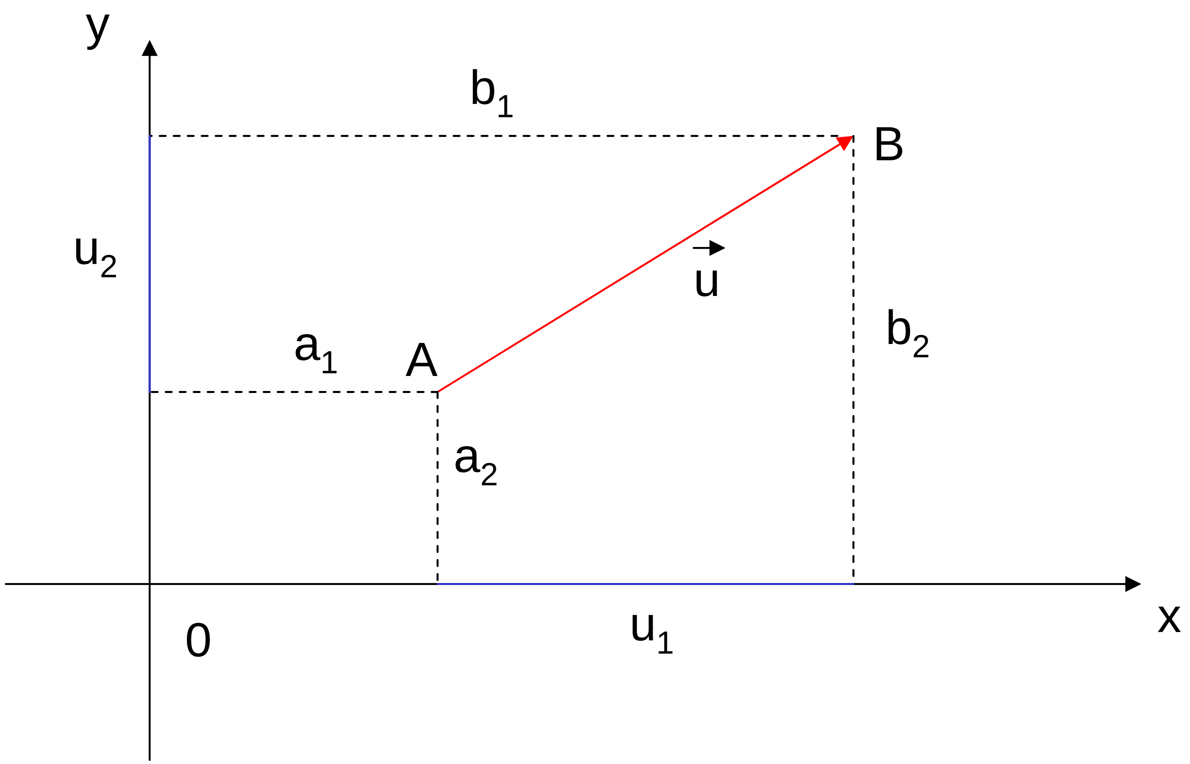
A [a_1, a_2] a B [b_1, b_2] a souřadnicemi vektoru **u** platí :

$$u_1 = b_1 - a_1 \qquad u_2 = b_2 - a_2$$

Zapisujeme $\vec{\mathbf{u}} = (u_1 , u_2)$

Souřadnice vektoru

- Graficky



Příklady

1.Určete souřadnice vektoru **u** = **AB,** je-li dáno :

a) A [-3 ; 4] , B [-4 ; 2]

b) A [-2 ; 5] , B [4 ; 4]

c) A [1 ; -2] , B [-3 ; 1]

d) A [1 ; -1 ; 2] , B [3 ; 1; 1]

2. V rovině jsou dámy body A , B. Určete čísla p , q v jejich zadáních tak, aby platilo:

a) A [3; p] , B [1 ; 2] , **u** = (q ; -1)

b) A [2 ; 1] , B [1+p ; 3] , **u** = (2 ; 1-q)

Velikost vektoru

- Velikost vektoru **u** je délka orientované úsečky **AB** : $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Každý vektor, který má velikost rovnu jedné, se nazývá jednotkový vektor.

$$|\mathbf{u}| = 1$$

Příklady

1. Vypočítejte velikost vektoru :

   a) A [3 ; -5] , B [12 ; 7]

   b) A [2 ; -3 ; -5] , B [1 ; 5 ; -1]

2. Určete zbývající souřadnici vektoru **u**, je-li dáno
   $|\mathbf{u}| = 34$, $\mathbf{u} = (-16 ; u_2)$

3. Určete souřadnici počátečního bodu A, vektoru

   $\mathbf{u} = B - A$ a vypočítejte velikost vektoru **u :**

   $\mathbf{u} = (-15 ; 8)$, B [-7 ; 5]

3. domácí úkol

1. Je dán kosočtverec ABCD s vrcholy
   $A [0 ; 0]$, $B [10 ; 0]$, $C [16 ; c_2]$.
   Určete souřadnice vektoru $\mathbf{u} = C – A$.
2. V prostoru určete bod $B = A + \mathbf{u}$, je-li
   $\mathbf{u} = P – Q$. Přitom $A [1 ; 2 ; -1]$,
   $P [0 ; 1 ; 1]$, $Q [1 ; 3 ; -2]$

Operace s vektory

1. Sčítání vektorů

Pro každé dva vektory $\mathbf{u} = (u_1 ; u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1 ; v_2)$ v rovině platí :

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1 ; u_2 + v_2)$$

Pro každé dva vektory $\mathbf{u} = (u_1 ; u_2 ; u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1 ; v_2 ; v_3)$ v prostoru platí :

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1 ; u_2 + v_2 ; u_3 + v_3)$$

2. Opačný vektor

Opačný vektor k vektoru **u** se označuje **-u.**

Opačný vektor má stejnou velikost jako vektor **u,** ale je sním nesouhlasně rovnoběžný.

Pro vektor **u** $= (u_1 ; u_2)$ v rovině platí **-u** $= (-u_1 ; -u_2)$.

Pro vektor **u** $= (u_1 ; u_2 ; u_3)$ v prostoru platí

-u $= (-u_1 ; -u_2 ; -u_3)$.

3. Odčítání vektorů

Odečíst vektor znamená přičíst vektor opačný, tzn.

$$\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} + (-\vec{\mathbf{v}})$$

Pro každé dva vektory $\mathbf{u} = (u_1 ; u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1 ; v_2)$ v rovině platí :

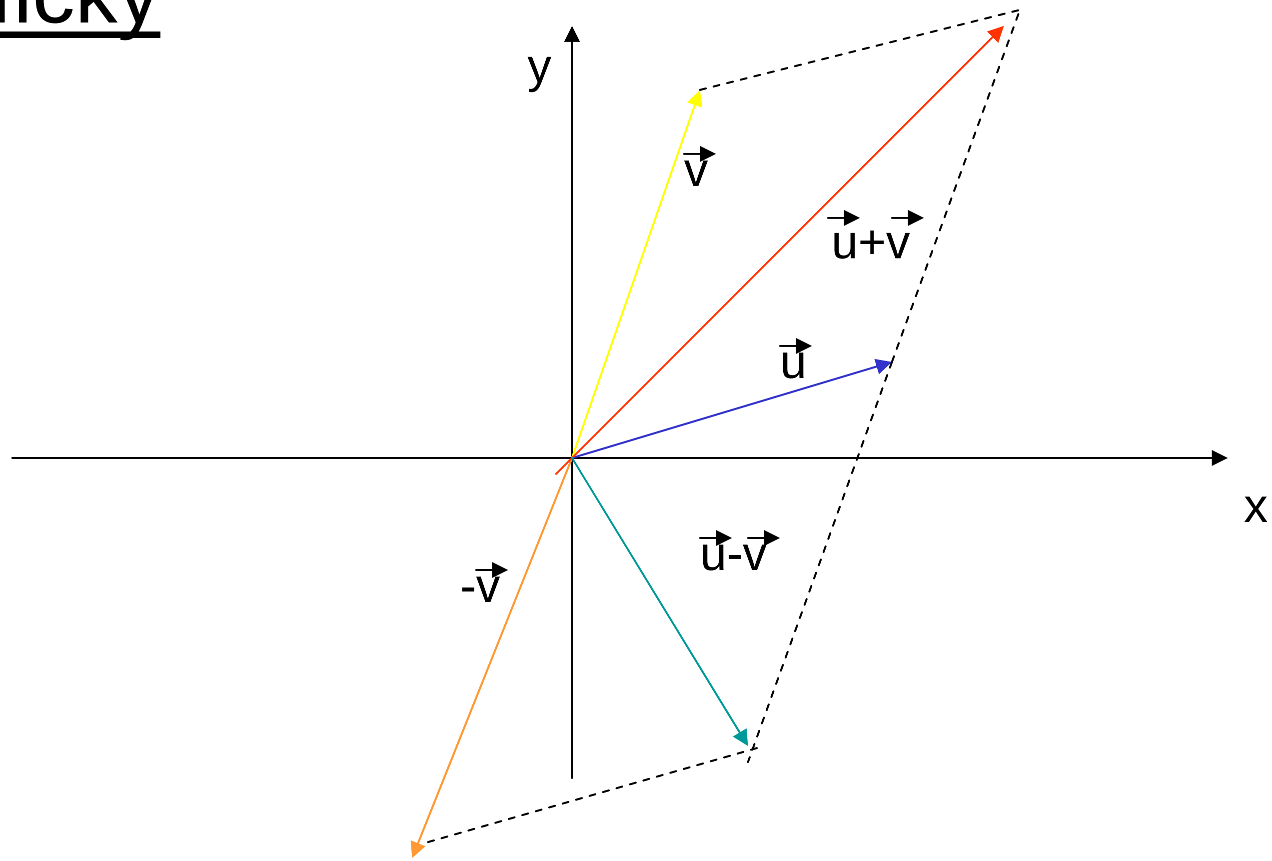
$$\mathbf{u - v} = (u_1 - v_1 ; u_2 - v_2)$$

Pro každé dva vektory $\mathbf{u} = (u_1 ; u_2 ; u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1 ; v_2 ; v_3)$ v prostoru platí :

$$\mathbf{u - v} = (u_1 - v_1 ; u_2 - v_2 ; u_3 - v_3)$$

Součet a rozdíl vektorů

- Graficky



4. Násobení vektoru reálným číslem k

Násobkem vektoru $\mathbf{u} = (u_1 ; u_2)$ v rovině,

$\mathbf{u} = (u_1 ; u_2 ; u_3)$ v prostoru, číslem k je vektor $k . \mathbf{u}$ **.**

Platí $k . \mathbf{u} = (k . u_1 ; k . u_2)$ v rovině,

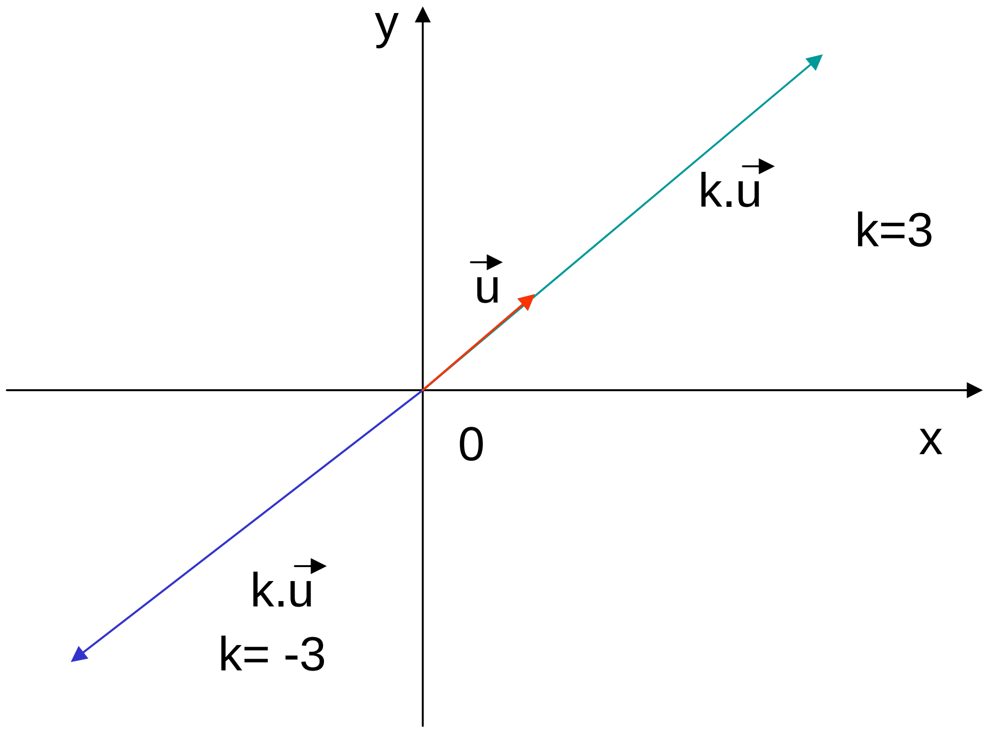
$k . \mathbf{u} = (k . u_1 ; k . u_2 ; k . u_3)$ v prostoru.

Součin vektoru **u** a čísla $k \in R$ je vektor rovnoběžný s vektorem **u**, pro který platí :

1. $k = 0$ tzn. $k . u = 0 . u = o$ (nulový vektor)
2. $k > 0$ tzn. vektory **u** a $k . \mathbf{u}$ jsou souhlasně rovnoběžné
3. $k < 0$ tzn. vektory **u** a $k . \mathbf{u}$ jsou nesouhlasně rovnoběžné

Násobení vektoru reálným číslem

- Graficky



Rovnoběžnost vektorů

- Dva vektory **u** a **v** jsou rovnoběžné (kolineární) právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého, tj. když existuje takové reálné číslo k, že platí :

$$\mathbf{u} = k \cdot \mathbf{v}$$

Rovnost vektorů

- Vektory **u** a **v** jsou si rovny **u** = **v** právě tehdy když se rovnají jednotlivé souřadnice :
- v rovině **u** = (u_1 ; u_2), **v** = (v_1 ; v_2)

  u = **v** <=> $u_1 = v_1$; $u_2 = v_2$

- v prostoru **u** = (u_1 ; u_2 ; u_3), **v** = (v_1 ; v_2 ; v_3)

  u = **v** <=> $u_1 = v_1$; $u_2 = v_2$; $u_3 = v_3$

Vztahy mezi vektory

- Pro každé dva vektory **u** a **v** (v rovině i prostoru) a čísla k, l platí :
  - $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
  - $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
  - $0 . \mathbf{u} = \mathbf{o}$ $\mathbf{o}$ = nulový vektor
  - $-1 . \mathbf{u} = \mathbf{-u}$
  - $\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}$
  - $k(l.\mathbf{u}) = (k.l).\mathbf{u}$
  - $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
  - $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$

Příklady

1. Vypočítejte součet a rozdíl vektorů **u** a **v** je-li dáno :
   a) **u** = (6 ; -5) , **v** = (4 ; 3)
   b) **u** = (-2 ; 3) , **v** = (4 ; 5)
   c) **u** = (7 ; -3 ; 4) , **v** = (3 ; -2 ; -5)
2. Vypočítejte součet a rozdíl vektorů **u** a **v ,**
   u = B – A , **v** = Q – P , je-li dáno :
   A [3 ; -1] , B [4 ; 2] , P [-1 ; 2] , Q [-2 ; -1]

Příklady

3. Jsou dány vektory : **a** = (1 ; 0 ; -3) ,
 b = (2 ; -4 ; 3) , **c** = (-5 ; 3 ; -2) určete souřadnice vektoru :

a) **u** = **a** + **b**

b) **v** = **a** – **b** + **c**

c) **w** = 3**a** – 2**b** - **c**

4. domácí úkol

Jsou dány vektory $\mathbf{u} = (3; -5)$, $\mathbf{v} = (-2; 6)$.

Vypočítejte souřadnice vektorů :

a) $2\mathbf{u}$

b) $\frac{1}{2}\mathbf{v}$

c) $\mathbf{u} - 4\mathbf{v}$

d) $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$

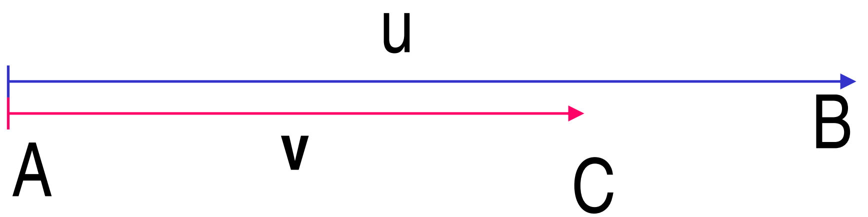
e) $1/3\mathbf{u} + 1/4\mathbf{v}$

f) $2(\mathbf{u} - \mathbf{v}) - 3(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

Úhel dvou vektorů

Dva nenulové vektory **u** = B – A, **v** = C – A můžeme vždy umístit tak, aby měly společný počáteční bod. Při umístění vektorů u , v do bodu A nastanou tyto možnosti :

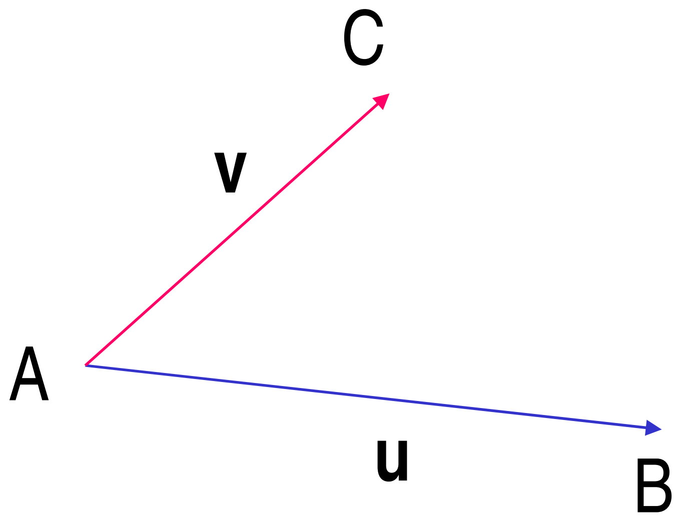
1. vektory **u** a **v** jsou souhlasně rovnoběžné tj. $\varphi = 0°$



2. vektory **u** a **v** jsou nesouhlasně rovnoběžné tj. $\varphi = 180°$

Úhel dvou vektorů

3. vektory jsou různoběžné $0° < \varphi < 180°$



Skalární součin

- Skalární součin **u** . **v** dvou nenulových vektorů je reálné číslo (skalár), které je rovno součinu velikostí těchto vektorů a kosinu velikosti úhlu φ, který tyto vektory svírají :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \varphi$$

Skalárním součinem **u** . **v** dvou nulových vektorů je reálné číslo 0.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Skalární součin

- Pravidlo pro výpočet skalárního součinu vektorů

  u = (u_1 ; u_2), **v** = (v_1 ; v_2) v rovině :

$$\mathbf{u} \, . \, \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Pravidlo pro výpočet skalárního součinu vektorů

u = (u_1 ; u_2 ; u_3), **v** = (v_1 ; v_2 ; v_3) v prostoru :

$$\mathbf{u} \, . \, \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Příklady

1. Vypočítejte skalární součin vektorů **u**, **v** je-li dáno :

   a) $\mathbf{u} = (2 ; 1)$, $\mathbf{v} = (-3 ; 2)$

   b) $\mathbf{u} = (-1 ; -4)$, $\mathbf{v} = (-3 ; -2)$

   c) $\mathbf{u} = (3 ; -1 ; 2)$, $\mathbf{v} = (-2 ; 4 ; 3)$

   d) $\mathbf{u} = (1 ; 0 ; 3)$, $\mathbf{v} = (3 ; 2 ; 1)$

2. Jsou dány body A [3 ; 2 ; 1] , B [1 ; -3 ; 0] , C [0 ; 2 ; 5]. Určete skalární součin vektorů **u**, **v**, kde $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = C - A$.

Velikost úhlu dvou vektorů

- Pro dva nenulové vektory **u** = (u_1 ; u_2), **v** = (v_1 ; v_2) v rovině se velikost úhlu φ vypočítá podle vzorce :

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

- Pro dva nenulové vektory **u** = (u_1 ; u_2 ; u_3), **v** = (v_1 ; v_2 ; v_3) v prostoru se velikost úhlu φ vypočítá podle vzorce :

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Příklady

1. Vypočítejte úhel dvou vektorů **u** , **v**, jestliže :
   a) **u** = (1 ; -2) , **v** = (2 ; 1)
   b) **u** = (-2 ; -1) , **v** = (1 ; 3)
   c) **u** = (2 ; -1 ; 1) , **v** = (2 ; 3 ; -1)
   d) **u** = (1 ; 2 ; -1) , **v** = (-2 ; -1 ; 2)
2. Vypočítejte vnitřní úhly v trojúhelníku ABC,
   jestliže A [-3 ; -5] , B [2 ; -1] , C [-1 ; 3] .

5.domácí úkol

- Vypočítejte vnitřní úhly v trojúhelníku ABC,

  jestliže jeho vrcholy mají souřadnice

  A [1 ; 2 ; -3] , B [0 ; 1 ; 2] , C [2 ; 1 ; 1].

Kolmost vektorů

- Dva nenulové vektory jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jejich skalární součin je roven nule.

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$$

Příklady

1. Zjistěte, zda vektory **u** , **v** jsou kolmé :

   a) **u** = (6 ; 3) , **v** = (4 ; -8)

   b) **u** = (7 ; -3 ; -9) , **v** = (-3 ; 8 ; -5)

2. Určete souřadnici v_1 vektoru **v** = (v_1 ; 6 ; -4) tak, aby vektor **v** byl kolmý k vektoru

   b = (1; -3 ; 5) .

3. Najděte vektor **u** , který je kolmý k vektoru **v** = (3 ; 4)

   a má velikost 15.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

- Pro dva vektory

Dva vektory **u**, **v** nazýváme lineárně závislé, lze-li jeden z nich napsat jako násobek druhého vektoru, tj **u** = k**v** .

Dva vektory **u**, **v** nazýváme lineárně nezávislé, nelze-li žádný z nich vyjádřit jako násobek druhého vektoru.

Řešené příklady

- Zjistěte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé.

1. **u** = (6 ; -2) , **v** = (-3 ; 1)

Řešení:

u = k . **v**

$u_1 = k_1 . v_1$ $\quad$ $u_2 = k_2 . v_2$

$6 = k_1 .(-2)$ $\quad$ $-3 = k_2 . 1$

$k_1 = -3$ $\quad$ $k_2 = -3$

$k_1 = k_2$ vektory **u** , **v** jsou lineárně závislé

Řešené příklady

2. $\mathbf{u} = (3; 1 ; 0)$, $\mathbf{v} = (2 ; 1 ; -2)$

Řešení:

$\mathbf{u} = k \,.\, \mathbf{v}$

$u_1 = k_1 . v_1$	$u_2 = k_2 . v_2$	$u_3 = k_3 . v_3$
$3 = 2.k_1$	$1 = k_2$	$0 = k_3 . (-2)$
$k_1 = -3/2$	$k_2 = 1$	$k_3 = 0$

$k_1 \neq k_2 \neq k_3$ vektory **u** , **v** jsou lineárně nezávislé

Lineární kombinace vektorů

Je dáno n libovolných vektorů $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ …$\mathbf{u}_n$.

Každý vektor, který lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_n\mathbf{u}_n ,$$

Kde a_1 , a_2 , ... , a_n jsou reálná čísla, nazýváme lineární kombinace vektorů

$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ …$\mathbf{u}_n$.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

- Pro tři vektory

Tři vektory **u**, **v, w** nazýváme lineárně závislé, lze-li jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících dvou.Např ve tvaru **w** = k**u** + l**v**

Nejsou-li vektory **u** , **v**, **w** lineárně závislé, nazýváme je lineárně nezávislé.

Řešené příklady

Zjistěte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé.

1. **u** = (12; 1 ; 14) , **v** = (1; 3 ; 0) , **w** = (2 ; 1 ; 2)

Řešení:

$$\mathbf{u} = k \,.\, \mathbf{v} + \mathbf{l} \,.\, \mathbf{w}$$

$$\begin{aligned} 12 &= k + 2l \\ 1 &= 3k + l \\ 14 &= 2l \quad \rightarrow \quad l = 7 \end{aligned}$$

Ze 3. rovnice jsme vyjádřili $l = 7$, dosadíme za l do první a do druhé rovnice a vyjde $k = -2$

Vektory **u** , **v**, **w** jsou lineárně závislé.

<u>Řešené příklady</u>

2. <u>**u** = (1; 3 ; 5) , **v** = (1; 3 ; -2) , **w** = (-3 ; -9 ; 6)</u>

<u>Řešení:</u>

<u>**u** = k **. v + l . w**</u>

$$\begin{aligned} 1 &= k - 3l \quad \rightarrow \quad k = 1 + 3l \\ 3 &= 3k - 9l \\ 5 &= -2k + 6l \end{aligned}$$

dosadíme za k :

<u>do 2. rovnice</u>

$3 = 3 + 9l – 9l$

$3 = 3$

<u>do 3. rovnice</u>

$5 = -2 - 6l + 6l$

$5 = -2$

Zjistili jsme, že čísla k , l neexistují, tzn o lineární závislosti či nezávislosti nemůžeme zatím rozhodnout.(pokračujeme)

Pokračování řešeného příkladu

Zvolíme jinou kombinaci vektorů : $\mathbf{v} = m.\mathbf{u} + n\,.\,\mathbf{w}$

$$1 = m - 3n \quad \rightarrow \quad m = 1 + 3n$$
$$3 = 3m - 9n$$
$$-2 = 5m + 6n$$

dosadíme za m :

do 2. rovnice

$$3 = 3 + 9m – 9m$$
$$3 = 3$$

do 3. rovnice

$$-2 = 5 + 15n + 6n$$
$$-1/3 = n$$

Zjistili jsme, že čísla m ,n existují m = 0 , n = -1/3 tzn. platí

$$\mathbf{v} = 0.\mathbf{u} – 1/3\,.w \quad \rightarrow \quad \mathbf{v} = -1/3\ w$$

Vektory **u** , **v**, **w** jsou lineárně závislé.

Řešené příklady

Zjistěte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé.

3. $\mathbf{u} = (0; 0; 1)$, $\mathbf{v} = (2; 1; 1)$, $\mathbf{w} = (1; 1; 1)$

Řešení:

$$\mathbf{u} = k \,.\, \mathbf{v} + l \,.\, \mathbf{w}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2k + l \\ 0 &= k + l \qquad \rightarrow \quad k = 0 \\ 1 &= k + l \qquad \rightarrow \quad k = l \qquad \text{tzn. spor} \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že čísla k , l neexistují.
Zvolíme jinou kombinaci vektorů

$$\mathbf{v} = m.\mathbf{u} + n \,.\, \mathbf{w}$$

$$\begin{aligned} 2 &= n \\ 1 &= n \qquad \text{tzn. spor} \\ 1 &= m + n \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že čísla m , n neexistují.
Zvolíme jinou kombinaci vektorů

Pokračování řešeného příkladu

Zvolíme jinou kombinaci vektorů $\mathbf{w} = p\,.\mathbf{v} + q.\mathbf{u}$

$1 = 2p \quad \rightarrow \quad p = 1/2$

$1 = p \quad \rightarrow \quad p = 1$

$1 = p + q \quad \rightarrow \quad p = -q \qquad \text{spor}$

Zjistili jsme, že čísla p , q neexistují.

Vektory **u** , **v**, **w** jsou lineárně nezávislé.

Příklady

Zjistěte, zda jsou uvedené vektory lineárně závislé.

a) **u** = (3; 1 ; 0) , **v** = (2; 1 ; -2) , **w** = (0 ; 1 ; 4)

b) **u** = (1; -2 ; 3) , **v** = (2; -1 ; 5) , **w** = (-1 ; -4 ; -1)

c) **u** = (1 ; 6 ; 0) , **v** = (2; 0 ; 1) , **w** = (0 ; -2 ; 3)