## 12 Výroková logika

### Výrok, výroková formule

V dalším textu jsou shrnuty základní pojmy dvou částí matematické logiky:

1) výrokové logiky (pracujeme s *výroky*)

2) predikátové logiky (pracujeme s *výrokovými formami*)

Základním pojmem výrokové logiky je *výrok.*

Výrok = každé srozumitelné sdělení, o kterém má smysl říci, že je buď pravdivé a nebo nepravdivé.

(Není důležité, zda to mohu rozhodnout právě teď, ale zda má smysl o pravdivosti rozhodovat.)

Příklady výroků: *Venku padá sníh.*

*Baví mě matematika.*

*20. 5. 2005 bude deštivo.*

*Číslo 7 je dělitelné 4.*

Výroky označíme *výrokovými proměnnými.* K označení budeme používat malá písmena

a, b, c, p, q, r, ........

Výroky mohou být pravdivé nebo nepravdivé. Jednotlivým výrokům přiřadíme jejich *pravdivostní hodnotu*.

Ph ........ pravdivostní hodnota výrok je pravdivý Ph (a) = 1

výrok je nepravdivý Ph (b) = 0

Ke každému výroku lze vytvořit jeho *negaci*.

původní výrok ....... p negace výroku ........ $\neg$ p

Negace výroku = výrok, který je nepravdivý, je-li výrok p pravdivý, a který je pravdivý, je-li výrok p nepravdivý.

| p | ¬p |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

Složené výroky – vznikají ze dvou a více výroků pomocí _logických spojek_ (zapisují se pomocí *funktorů*).

_Konjunkce_ ............................... ∧ . (čteme: p a q)

Konjunkce výroků p, q = výrok, který je pravdivý pouze tehdy, jsou-li pravdivé oba výroky p, q.

| p | q | p∧q |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

_Disjunkce_ ............................... ∨ + (čteme: p nebo q)

Disjunkce výroků p, q = výrok, který je pravdivý právě tehdy, když alespoň jeden z výroků p, q je pravdivý.

_Ostrá disjunkce_ ..................... $\underline{\vee}$ (čteme: buď p nebo q)

Ostrá disjunkce výroků p, q = výrok, který je pravdivý právě tehdy, když je jeden z výroků p, q pravdivý a druhý nepravdivý.

| p | q | p∨q |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

| p | q | p$\underline{\vee}$q |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

Srovnejte význam spojky „nebo“ v běžném jazyce (Večer půjdu do kina nebo se budu dívat na televizi.) a ve výrokové logice.

*Implikace* ............................ => (čteme: jestliže p, potom q)

Implikace výroků p, q = výrok, který je nepravdivý pouze tehdy, když je výrok p pravdivý a výrok q nepravdivý.

| P | q | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

*Zamyslete se nad tím, který den v týdnu je výrok „Jestliže je dnes sobota, mám chobot.“ pravdivý.*

*Ekvivalence* ....................... <=> (čteme: p právě tehdy, když q)

Ekvivalence výroků p, q = výrok, který je pravdivý pouze v případech, kdy oba výroky p, q mají stejnou pravdivostní hodnotu.

| P | q | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

*Všimněte si toho, že ekvivalenci lze chápat jako „oboustrannou implikaci“.*

| p | Q | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

**Abeceda výrokové logiky**

- určuje, jaké symboly můžeme používat k vytváření složitějších výroků.

Znaky pro výrokové proměnné p, q, r, s, ..........

Znaky pro konstanty (P......... pravdivý výrok, N......... nepravdivý výrok)

Znaky pro funktory $\wedge, \vee, \underline{\vee}, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$

Pomocné znaky ( ), [ ], { } ................ závorky

Pomocí těchto znaků můžeme tvořit <u>*výrokové formule*</u>.

Například: $\neg (p \wedge q) \Rightarrow r$ je výroková formule

$\neg \Rightarrow (p\vee)$ není výroková formule (Jsou použity znaky z abecedy výrokové logiky, ale nemají „správné“ pořadí.)

Následující definice určuje, kdy užitím znaků výrokové logiky vznikne výroková formule.

Def. *Výroková formule*

Každá výroková proměnná p, q, r,...... je výrokovou formulí.

Konstanty P, N jsou výrokové formule.

Jestliže nějaké výrazy $\alpha$, $\beta$ jsou výrokovými formulemi, potom i výrazy $\neg \alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \underline{\vee} \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$ a $\alpha \Leftrightarrow \beta$ jsou výrokové formule.

Žádné jiné výrazy nejsou výrokové formule.

**Pravdivostní ohodnocení výrokové formule**

Podle definice každá výroková formule obsahuje výrokové proměnné. Například formule

$(\neg p \vee q) \Rightarrow (\neg q \wedge p)$ obsahuje proměnné p, q.

Provedeme pravdivostní ohodnocení výrokové formule, tj. za proměnné dosadíme jejich pravdivostní hodnoty. Všechny vzájemné možnosti pravdivostního ohodnocení uvedeme v tabulce. Jestliže výroková formule obsahuje n proměnných, bude mít tabulka $2^n$ řádků.

| $(\neg p$ | $\vee$ | $q)$ | $\Rightarrow$ | $(\neg q$ | $\wedge$ | $p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Při vyhodnocení mohou nastat 3 možnosti:

Pro všechny pravdivostní hodnoty výrokových proměnných vznikne z výrokové formule výrok pravdivý. Taková výroková formule se nazývá *tautologie.*

Pro všechny pravdivostní hodnoty výrokových proměnných vznikne z výrokové formule výrok nepravdivý. Taková výroková formule se nazývá *kontradikce.*

Pro některé pravdivostní hodnoty vznikne výrok pravdivý a pro některé nepravdivý. Taková výroková formule se nazývá *splnitelná formule*

Jaký typ formule je uveden v příkladu? Pro které hodnoty výrokových proměnných dostaneme pravdivý výrok?

**Matematizace reálné situace**

(užití pravdivostního ohodnocení při řešení slovních úloh)

Postup:

převedeme text z běžného jazyka do jazyka výrokové logiky,

provedeme pravdivostní ohodnocení,

výsledek převedeme zpět do běžného jazyka.

Př. V dílně pracují tři stroje podle těchto podmínek:

Pracuje-li první stroj, pracuje i druhý stroj.

Pracuje druhý nebo třetí stroj.

Nepracuje-li první stroj, nepracuje ani třetí stroj.

Rozhodněte, jaké jsou možnosti pro práci těchto tří strojů.

Řešení:

a) zavedeme výrokové proměnné:

a .......................... pracuje první stroj

b .......................... pracuje druhý stroj

c .......................... pracuje třetí stroj

Podmínky vyjádřené v textu úlohy zapíšeme jako výrokové formule.

1) $a \Rightarrow b$ 2) $b \vee c$ 3) $\neg a \Rightarrow \neg c$

b) provedeme pravdivostní ohodnocení výrokových formulí:

| a | $\Rightarrow$ | b | b | $\vee$ | c | $\neg$a | $\Rightarrow$ | $\neg$c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | <u>1</u> | 0 | 0 | <u>0</u> | 0 | 1 | <u>1</u> | 1 |

Protože všechny tři podmínky mají být splněny současně, vybereme řádky, ve kterých je u všech formulí pravdivostní hodnota 1. (V tabulce jsou tyto řádky vyznačeny barevně.)

Zjistíme, jaké jsou na vyznačených řádcích pravdivostní hodnoty proměnných a, b, c. Podle toho zformulujeme odpověď:

Jsou tři možnosti pro práci strojů:

pracují všechny tři stroje,

pracuje první a druhý stroj, nepracuje třetí,

první a třetí stroj nepracují, pracuje druhý stroj.

**Logicky ekvivalentní formule**

Nechť α, β jsou výrokové formule. Jestliže $\alpha \Leftrightarrow \beta$ je tautologie (tj. α i β mají stejné sloupce pravdivostních hodnot), říkáme, že α, β jsou logicky ekvivalentní.

Zápis: $\alpha \sim \beta$

Př. Zjistěte, zda je výroková formule $\neg (p \wedge q)$ logicky ekvivalentní s výrokovou formulí

$\neg p \vee \neg q$.

| ¬ | (p | ∧ | q) | ⇔ | ¬p | ∨ | ¬q |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Závěr: Dané výrokové formule jsou logicky ekvivalentní.

Dále uvádíme některé logicky ekvivalentní formule často užívané ve výrokové logice.

| | | |
|---|---|---|
| E1 | $\neg (p \wedge q) \sim \neg p \vee \neg q$ | de Morganovy zákony |
| E2 | $\neg (p \vee q) \sim \neg p \wedge \neg q$ | |
| E3 | $p \wedge q \sim q \wedge p$ | komutativnost konjunkce |
| E4 | $p \vee q \sim q \vee p$ | komutativnost disjunkce |
| E5 | $(p \wedge q) \wedge r \sim p \wedge (q \wedge r)$ | asociativnost konjunkce |
| E6 | $(p \vee q) \vee r \sim p \vee (q \vee r)$ | asociativnost disjunkce |
| E7 | $p \wedge (q \vee r) \sim (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | vzájemná distributivnost konjunkce a |
| E8 | $p \vee (q \wedge r) \sim (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | disjunkce |
| E9 | $\neg (\neg p) \sim p$ | zákon dvojité negace |
| E10 | $(p \vee \neg p) \sim P$ | zákon vyloučení třetí možnosti |
| E11 | $(p \wedge \neg p) \sim N$ | zákon sporu |
| E12 | $(p \Rightarrow q) \sim \neg p \vee q$ | |
| E13 | $(p \Leftrightarrow q) \sim (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ | |
| E14 | $(p \wedge p) \sim p$ | idempotence konjunkce |
| E15 | $(p \vee p) \sim p$ | idempotence disjunkce |
| E16 | $(p \wedge P) \sim p$ | neutrálnost P vůči konjunkci |
| E17 | $(p \wedge N) \sim N$ | agresívnost N vůči konjunkci |
| E18 | $(p \vee P) \sim P$ | agresívnost P vůči disjunkci |
| E19 | $(p \vee N) \sim p$ | neutrálnost N vůči disjunkci |