11 HISTORIE VÝVOJE ČÍSELNÝCH SOUSTAV

Pravěký člověk znázorňoval čísla pomocí nejdostupnějších pomůcek: prstů, kaménků a zářezů. Pro vyjádření velkých čísel to ale bylo nepraktické – prstů bylo málo, větší množství uzlů nebo zářezů se stávalo nepřehledným. Proto nezbylo nic jiného, než několik jednotek nahradit jednotkou vyššího řádu. Na kostech se objevily zářezy ve tvaru písmene V nebo X. Je možné, že symbol V představuje ruku s pěti roztaženými prsty a symbol X dvě takové ruce. Užíváním prstů na jedné ruce byla zavedena pětková soustav. Tu používali například některé kmeny v Africe.

Protože člověk má celkem dvacet prstů, používala se často dvacítková soustava. Vyspělou číselnou symboliku měli Indiáni kmene Mayů. Dvacítkovou soustavu používali až do 6. století n.l. Je zajímavé, že prvních dvacet jednotek (nultý řád) tvořilo jednu jednotku prvního řádu, ale osmnáct jednotek prvního řádu tvořilo jednotku druhého řádu. Vysvětlení najdeme v zapisování dní podle kalendáře. Sluneční rok (365 dní) vyjadřovali Mayové jako $18 \cdot 20 + 5$. Jednotky vyšších řádů byly již tvořeny seskupováním po dvaceti.

Sumerové vyvinuli abstraktní formu zápisu symbolů. Symboly zapisovali na hliněných tabulkách, z nichž tisíce bylo nalezeno a prostudováno. Sumerové měli rozvinutý systém čísel, který byl v určitém smyslu dokonalejší než náš dnešní systém. Používali poziční systém se základem 60, zatímco náš systém používá základ 10, který má dva vlastní dělitele, čísla 2 a 5. Sumerský systém má deset vlastních dělitelů a proto více čísel má konečný tvar. Sumerové rozdělovali den na 24 hodin, každou hodinu na 60 minut a každou minutu na 60 sekund. Tento systém počítání času přežil 4000 let až dodnes. Hlavní nevýhodou tohoto systému byla neexistence nuly. Čísla proto neměla jednoznačnou reprezentaci, ale bylo je nutno uvažovat v kontextu výpočtu, aby bylo zřejmé, zda zápis 1 znamená číslo 1, 61, 3601 atd.

Zajímavý zápis čísel používali Egypťané. Číslice od jedné do devíti psali čárkami. Symbolem pro číslo 10 byl stylizovaný obraz ruky, pro číslo 100 spirála jako obraz svinutého palmového listu. Znakem pro 1000 byl symbol Nilu – lotos, pro 10 000 ohnutý prst, pro 100 000 obrázek zárodku žáby. Milión se zapsal obrázkem boha, který drží oblohu. při zápisech se vycházelo spíše z hledisek estetických než matematických. Tak se jednou psalo od levé strany k pravé a jindy zase obráceně. Prokreslené znaky se používali většinou na zdobení staveb. Při běžném psaní čísel a výpočtech písaři znaky zjednodušovali. Takové zápisy čísel se dochovaly na papyrech.

Za objevitele pozičního systému, který užíváme my, jsou pokládáni Indové. Nejstarší číselný systém vznikl v Indii ve 3. století př. n. l. Tehdy se užívaly dva druhy písma – kharosti a bráhmi. Každý měl svoje číslice. Číslice kharosti se na první pohled podobají římským číslicím, i když původ je odlišný. Naše číselné znaky pravděpodobně pocházejí z číslic bráhmi. Pro čísla 1 až 3 se používaly čárky, ale další číslice už vyjadřoval vlastní znak psaný jedním tahem.

Asi v 7. století se objevila v indických zápisech čísel nula. Stala se rovnocennou ostatním číslicím. Užitím nuly a vyjadřováním čísel větších než 100 nebo 1000 pomocí počtu stovek nebo tisíců se vyvinul dnešní způsob zápisu čísel. Indický způsob převzali Arabové a postupně se dostal do Řecka. V Itálii vyšla počátkem 13. století kniha Leonarda z Pisy "Liber Abaci", ve které se používali indické číslice. Tak i v kolébce římských číslic začala vítězit poziční desítková soustava. Zápisy čísel a výpočty v ní byly mnohem přehlednější a jednodušší. Navíc měl zápis jednoznačná pravidla.

Ještě dlouho však trval v některých zemích Evropy odpor k používání indických číslic. I u nás přežívaly číslice římské.

Poměrně dlouho bylo počítání v našich zemích ovlivňováno i slovanskou číselnou soustavou. Ta používala k zápisu čísel dvaceti písmen. Nad ně se zapsal znak N a písmena se tím v textu změnila na číslice. Další doplňující znaky sloužily k zápisu vysokých řádů.

Vyjádření přirozeného čísla v číselné soustavě

Každé přirozené číslo *a* lze zapsat pomocí polynomu ve tvaru

$$a = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z^1 + a_0 z^0$$

kde:

a je číslo vyjádřené v číselné soustavě o základu z.

z je základ číselné soustavy, z je celé kladné číslo větší než jedna.

Číslo z^i, kde $i = 0, 1, \dots, n$ se nazývá jednotka řádu *i*, nebo také jednotka *i*-tého řádu.

a_i jsou číselné koeficienty pro něž platí a_i <0,1,2, ..., z-1>.

Nazýváme je *číslice* neboli *cifry* ; o číslici a_i říkáme, že je číslicí i-tého řádu, neboli číslicí řádu *i*.

n je počet řádových míst. Číslo *a* je *n* + 1 ciferné v soustavě o základu z.

Tento zápis nazýváme *rozvojem* čísla *a* v soustavě o základu *z*. Číslo *a* běžně píšeme zkráceně ve tvaru

$$a = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_z$$

který nazýváme *pozičním* zápisem přirozeného čísla *a* v soustavě o základu z. Označení *poziční* znamená, že každá číslice má v zápisu čísla na jiném místě (jiné pozici) odlišný význam. Například 724 se nerovná 742. Proto jsou tyto číselné soustavy nazývány *poziční* číselné soustavy. Příkladem *nepoziční* číselné soustavy jsou římské číslice.

V praxi se běžně používá soustava o základu deset (desítková, decimální), ve výpočetní technice ještě soustavy o základu dva (dvojková, binární) a šestnáct (šestnáctková, hexadecimální) a někdy i osm (osmičková, oktalová).

Desítková soustava

Desítkovou (decimální) soustavou je nazývána soustava o základu deset (z = 10). Používá deset číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Jednotky některých řádů mají speciální názvy: 10 ... deset, 10^2 ... sto, 10^3 ... tisíc, 10^6 ... milión, 10^9 ... miliarda, 10^{12} ... bilión atd.

Každé číslo lze v desítkové soustavě zapsat pomocí polynomu

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

Například číslo 3725 můžeme rozepsat

$$3725 = 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 = 3 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$

Desítková soustava je nejrozšířenější číselnou soustavou, používanou téměř na celém světě. Byla pravděpodobně odvozena od počtu prstů na rukou. Tyto prsty jsou velmi často používány jako primitivní počítací stroj, zvláště malými dětmi, pro jednoduché matematické operace sčítání a odčítání.

Dvojková soustava

Dvojkovou (binární) soustavou je nazývána soustava o základu dva (z = 2). Používá pouze dvou číslic 0 a 1. Je používána především ve výpočetní technice.

Každé číslo lze ve dvojkové soustavě zapsat pomocí polynomu

$$a = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

Šestnáctková soustava

Šestnáctkovou (hexadecimální) soustavou je nazývána soustava o základu šestnáct (z = 16). Používá šestnácti číslic; protože však v běžném životě používáme pouze deset číslic, jsou pro vyjádření zbývajících číslic použity písmena ze začátku abecedy. V šestnáctkové soustavě se tedy používají tyto číslice: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Každé číslo lze v šestnáctkové soustavě zapsat pomocí polynomu

$$a = a_n \cdot 16^n + a_{n-1} \cdot 16^{n-1} + ... + a_2 \cdot 16^2 + a_1 \cdot 16^1 + a_0 \cdot 16^0$$

Převádění zápisu přirozeného čísla z jedné číselné soustavy do druhé

1. Ze soustavy o základu jiném než deset do desítkové soustavy

Přepočet čísla z libovolné soustavy o základu *X* do soustavy se základem 10 provedeme dosazením do polynomu. Například

$2012_3 = 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 2 \cdot 27 + 0 + 3 + 2 = 59$

$110110_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 4 + 2 = 54$

$D4_{16} = 13 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 = 208 + 4 = 212$

2. Z desítkové soustavy do soustavy o základu jiném než deset

Přepočet se provádí pomocí dvou algoritmů, a to buďto postupným dělením čísla základem nové soustavy, nebo dělením čísla mocninou základu, která se postupně snižuje.

Přepočet dělením základem nové soustavy

V tomto případě dělíme číslo základem nové soustavy. Získaný (neúplný) podíl opět dělíme základem nové soustavy. Pokračujeme tak dlouho, dokud není neúplný podíl nula. Koeficienty a_i vycházejí jako zbytky dělení v pořadí $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$. Poziční zápis čísla v nové soustavě získáme tak, že napíšeme všechny zbytky v pořadí od konce do začátku $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$

Příklad: převeďte číslo $25_{(10)}$ do dvojkové soustavy.

Řešení:

25 : 2 =	12 + 1	$a_0 = 1$
12 : 2 =	6 + 0	$a_1 = 0$
6 : 2 =	3 + 0	$a_2 = 0$
3 : 2 =	1 + 1	$a_3 = 1$
1 : 2 =	0 + 1	$a_4 = 1$

Výsledek: $25_{(10)} = 11001_{(2)}$

Přepočet dělením mocninou základu

V tomto případě dělíme číslo nejvyšší možnou mocninou základu nové soustavy. Nejvyšší možná mocnina *n* základu *z* je taková, pro kterou je z^n menší nebo rovno převáděnému číslu a mocnina o jeden řád vyšší (z^{n+1}) je již větší než převáděné číslo. Zbytek po tomto dělení dělíme mocninou základu o jeden řád nižší než předchozí. Tento postup opakujeme až do dělení nultou mocninou. Koeficienty a_i vycházejí jako výsledek částečných dělení v pořadí a_{n-1}, a_{n-2},...,a_1, a_0. Poziční zápis čísla v nové soustavě získáme tak, že napíšeme všechny podíly v pořadí od začátku do konce $a_n a_{n-1}$ ... $a_1 a_0$

Příklad: převeďte číslo $25_{(10)}$ do dvojkové soustavy.

Řešení:

$25 : 2^4 =$	$1 + 9$	$a_4 = 1$
$9 : 2^3 =$	$1 + 1$	$a_3 = 1$
$1 : 2^2 =$	$0 + 1$	$a_2 = 0$
$1 : 2^1 =$	$0 + 1$	$a_1 = 0$
$1 : 2^0 =$	$1 + 1$	$a_0 = 1$

Výsledek: $25_{(10)} = 11001_{(2)}$

Příklad: převeďte číslo $50_{(10)}$ do osmičkové soustavy.

Řešení:

$50 : 8^1 =$	$6 + 2$	$a_1 = 6$
$2 : 8^0 =$	$2 + 0$	$a_0 = 2$

Výsledek: $50_{(10)} = 62_{(8)}$

Příklad: převeďte číslo $527_{(10)}$ do šestnáctkové soustavy.

Řešení: $527 : 16^2 = 2 + 15$ $a_2 = 2$

$15 : 16^1 = 0 + 15$ $a_1 = 0$

$15 : 16^0 = 15 + 0$ $a_0 = 15 = F$ (v šestnáctkové symbolice)

Výsledek: $527_{(10)} = 20F_{(16)}$

Mezi soustavami o základu jiném než deset

Přepočet můžeme provádět tím způsobem, že nejprve dané číslo vyjádříme v desítkové soustavě a to potom převedeme do požadované soustavy.

Příklad 1:

253 / 2 = 126 … **zbytek = 1**

126 / 2 = 63 … **zbytek = 0**

63 / 2 = 31 … **zbytek = 1**

31 / 2 = 15 … **zbytek = 1**

15 / 2 = 7 … **zbytek = 1**

7 / 2 = 3 … **zbytek = 1**

3 / 2 = 1 … **zbytek = 1**

1 / 2 = 0 … **zbytek = 1**

11111101

Číslo pak přečteme od spodu (desetinná čárka je u prvního zbytku).

Číslo 253 v desítkové soustavě má tvar 11111101.

Při převodu desetinných míst se číslo naopak základem násobí a zapíšeme si hodnotu před desetinou čárkou.

Příklad 2:

0,36 . 2 = 0,72 … **hodnota před desetinou čárkou = 0**

0,72 . 2 = 1,44 … **hodnota před desetinou čárkou = 1**

0,44 . 2 = 0,88 … **hodnota před desetinou čárkou = 0**

0,88 . 2 = 1,66 … **hodnota před desetinou čárkou = 1**

0,66 . 2 = 1,22 … **hodnota před desetinou čárkou = 1**

0,22 . 2 = 0,44 … **hodnota před desetinou čárkou = 0**

atd. **0,010110**

Číslo nelze vyjádřit přesně, stalo se iracionálním. Pro zápis zvolíme míru přesnosti (počet desetinných míst). Desetinná čárka je opět u první hodnoty.

Číslo má tvar 0,010110

Má-li číslo jak celou, tak desetinnou část, pak si nejprve dělením vypočtete celou část a pak postupným násobením desetinnou část. Číslo 253,36 by se rozdělilo na 253 a 0,36 .

Podobný postup se využívá při převodu do dalších číselných soustav.

Při převodu z dvojkové do osmičkové soustavy si číslo rozdělte na trojice bitů a každou z nich převeďte zvlášť ($2^3 = 8$). Naopak při převodu z dvojkové do šestnáctkové soustavy číslo rozdělíme na čtveřice bitů ($2^4 = 16$).

Příklad 3: Číslo 486 vyjádřeno ve dvojkové soustavě 111100110 převeďte do osmičkové soustavy.

111 |100|110

7|4|6

Řešení:číslo v osmičkové soustavě je 746.

Příklad 4: Číslo 486 vyjádřeno ve dvojkové soustavě 111100110 převeďte do šestnáctkové (hexadecimální) soustavy.

0001|1110|0110

1|14|6 - čísla 10 až 15 jsou vyjádřeny znaky A až F

1|E|6

Řešení: číslo v šestnáctkové soustavě je 1E6.