

Booleova algebra



Popis řešeného problému:

Booleova algebra je důležitý pomocník, který slouží k minimalizaci funkce pomocí zákonů a pravidel. Ne vždy se nám podaří řešit úkol kde se objevuje nějaká jednoduchá funkce. Jakmile se vyskytne složitější funkce je lepší ji minimalizovat pomocí Booleovy algebry. Booleovou algebrou jakožto jednoduchým a přesným prostředkem, popisujeme logické obvody a navrhujeme je když známe algebraický výraz.

Definice

Booleova algebra je definována jako množina prvků (proměnných $A, B, \dots, X, Y$, které mohou nabývat hodnot buď 0 nebo 1) v níž je definována ekvivalence (rovnost) mezi prvky a v níž jsou axiomaticky zavedeny některé vlastnosti operací vytvářejících logické funkce příslušného úplného souboru. Podle principu substituce můžeme potom nahrazovat logické výrazy, které jsou si ekvivalentní (rovné).

Axiomy:

- | | |
|------------------|------------------|
| A) $1*1=1$ | B) $1*0=0*1=0$ |
| C) $0*0=0$ | D) $0+0=0$ |
| E) $0+1=1+0=1$ | F) $1+1=1$ |
| G) $\bar{0} = 1$ | H) $\bar{1} = 0$ |

Soubor axiomů musí být:

- Bezesporný, tj. nelze z něj správnými postupy odvodit dvě vzájemně si odporující vlastnosti.
- Úplný, přidáním dalšího axiomu, jehož obsah nelze odvodit z daného souboru axiomů, by se porušila bezespornost.

Booleova algebra je jediná soustava pravidel a zákonů (viz. [tabulka 1](#)), která slouží k popisu vztahů mezi dvouhodnotovými logickými proměnnými. V podstatě se jedná o pravidla popisující nejčastější logické operace.

Používají se zde tři logické funkce:

- negace,
- konjunkce,
- disjunkce.

Tabulka 1: Základní zákony a pravidla Booleovy algebry

1. Zákon vyloučení třetího	$x + \bar{x} = 1$	$1 + 0 = 1 \dots 0 + 1 = 1$
2. Logický rozpor	$x * \bar{x} = 0$	$1 * 0 = 0 \dots 0 * 1 = 0$
3. Zákon dvojité negace	$\overline{\bar{x}} = x$	$\bar{\bar{1}} = 1 \dots \bar{\bar{0}} = 0$
4. Zákon opakování	$x + x = x$ $x * x = x$	$1 + 1 = 1 \dots 0 + 0 = 0$ $1 * 1 = 1 \dots 0 * 0 = 0$
5. Komutativní zákon	$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$	$1 + 1 = 1 + 1 \dots 0 + 0 = 0 + 0$ $1 * 1 = 1 * 1 \dots 0 * 0 = 0 * 0$

zakony		
6. Asociativní zákony	$x_1 + (x_2 + x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ $x_1 * (x_2 * x_3) = x_1 * x_2 * x_3$	$1 + (0 + 1) = 1 + 1 = 0 \dots = \dots 1 + 0 + 1 = 1$ $1 * (0 * 1) = 1 * 0 = 0 \dots = \dots 1 * 0 * 1 = 0$
7. Distributivní zákony	$x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$ $x_1 + x_2 * x_3 = (x_1 + x_2) * (x_1 + x_3)$	$1 * (0 + 1) = 1 * 1 = 1 \dots = \dots 1 * 0 + 1 * 1 = 0 + 1 = 1$ $1 + (0 * 1) = 1 + 0 = 1 \dots = \dots (1 + 0) * (1 + 1) = 1 * 1 = 1$
8. Absorpční zákony (zákony agrese)	$x_1 + x_1 * x_2 = x_1$ $x_1 * (x_1 + x_2) = x_1$ $x_1 + \bar{x}_1 * x_2 = x_1 + x_2$ $x_1 * (\bar{x}_1 + x_2) = x_1 * x_2$	$1 + 1 * 0 = 1 + 0 = 1$ $1 * (1 + 1) = 1 * 1 = 1$ $1 + \bar{1} * 0 = 1 + 0 \dots = \dots 1 + 0$ $1 * (\bar{1} + 0) = 1 * 0 \dots = \dots 1 * 0$
9. Neutrálnost	$0 + x = x$ $1 + x = 1$ $1 * x = x$ $0 * x = 0$	$0 + 1 = 1 \dots 0 + 0 = 0$ $1 + 1 = 1 \dots 1 + 0 = 1$ $1 * 1 = 1 \dots 1 * 0 = 0$ $0 * 1 = 0 \dots 0 * 0 = 0$
10. De Morganovy zákony	$\overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 * \bar{x}_2$ $\overline{x_1 * x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$	$\overline{1 + 0} = 1 = 0 \dots = \dots 1 * 0 = 0 * 1 = 0$ $\overline{1 * 0} = \bar{0} = 1 \dots = \dots \bar{1} + \bar{0} = 0 + 1 = 1$

Příklad:

Níže jsou uvedeny příklady, kde s využitím zákonů a pravidel Booleovy algebry (viz. [tabulka 1](#)) jsou minimalizovány zadané logické funkce.

Zadání 1:

Minimalizujte zadanou logickou funkci:

$$y = \bar{x}_1 * x_2 * x_3 \vee x_1 * \bar{x}_2 * \bar{x}_3 \vee x_1 * \bar{x}_2 * x_3 \vee x_1 * x_2 * \bar{x}_3 \vee x_1 * x_2 * x_3$$

Řešení:

Při minimalizaci zadané logické funkce budeme postupovat následovně:

Zvolíme vytýkání členů:

a) z 2. a 3. členu vytkneme:

$$x_1 * \bar{x}_2$$

b) z 4. a 5. členu vytkneme:

$$x_1 * x_2$$

Po vytýkání bude logická funkce vypadat následovně:

$$y = \bar{x}_1 * x_2 * x_3 \vee x_1 * \bar{x}_2 * (\bar{x}_3 \vee x_3) \vee x_1 * x_2 * (\bar{x}_3 \vee x_3)$$

Výrazy v závorkách jsou podle zákona vyloučeného třetího rovny jedné.

Pak budeme upravovat logickou funkci následovně:

c) z 2. a 3. členu vytkneme x_1 , z toho vyplývá, že výraz v závorce je ze stejného důvodu opět roven jedné.

Logická funkce po další úpravě vypadá následovně:

$$y = \bar{x}_1 * x_2 * x_3 \vee x_1 * \bar{x}_2 \vee x_1 * x_2 = \bar{x}_1 * x_2 * x_3 \vee x_1 (\bar{x}_2 \vee x_2)$$

Při minimalizaci zadané logické funkce jsme použili absorpční zákon a tím jsme dostali konečný výsledek:

$$y = \bar{x}_1 * x_2 * x_3 \vee x_1 = x_1 \vee x_2 * x_3$$

Zadání 2:

Minimalizujte zadanou logickou funkci:

$$y = x_1 * \overline{x_3 * x_4} \vee \overline{x_1 * x_3 * x_4} \vee \overline{x_2 * x_3 * x_4}$$

Řešení:

Při minimalizaci zadané logické funkce budeme postupovat následovně:

a) podle De Morganova zákona převedeme negaci logických součinů na součet negací:

$$y = x_1 * (\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \vee (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \vee (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$$

b) výraz v první závorce roznásobíme:

$$y = x_1 * \bar{x}_3 \vee x_1 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 = (x_1 \vee 1) * \bar{x}_3 \vee (x_1 \vee 1) * \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$$

Zde je důležité poznamenat, že:

c) podle zákona agresivnosti 0 a 1 platí:

$$1 \vee x = 1$$

d) podle zákona opakování platí:

$$x \vee x = x$$

Po úpravě logické funkce nám vyšel výsledek, který vypadá následovně:

$$y = \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 = \overline{x_1 * x_2 * x_3 * x_4}$$

Zadání 3:

Minimalizujte zadanou logickou funkci:

$$y = \bar{x}_1 * x_2 * \bar{x}_3 \vee x_1 * \bar{x}_2 * \bar{x}_3 \vee x_1 * x_2 * \bar{x}_3 \vee x_1 * x_2 * x_3$$

Řešení:

Při minimalizaci zadané logické funkce budeme postupovat následovně:

a) zde budeme používat absorpční zákon:

$$x_1 \vee \bar{x}_1 * x_2 = x_1 \vee x_2$$

Následná úprava s využitím absorpčního zákona vypadá následovně:

$$y = \bar{x}_1 * x_2 * \bar{x}_3 \vee x_1 * \bar{x}_2 * \bar{x}_3 \vee x_1 * x_2 * (\bar{x}_3 \vee x_3) = \bar{x}_1 * x_2 * \bar{x}_3 \vee x_1 * \bar{x}_2 * \bar{x}_3 \vee x_1 * x_2$$

$$y = \bar{x}_1 * x_2 * \bar{x}_3 \vee x_1 * (\bar{x}_2 * \bar{x}_3 \vee x_2) = \bar{x}_1 * x_2 * \bar{x}_3 \vee x_1 * (\bar{x}_3 \vee x_2)$$

$$y = \bar{x}_1 * x_2 * \bar{x}_3 \vee x_1 * \bar{x}_3 x_1 \vee x_1 * x_2 = x_2 * (\bar{x}_1 * \bar{x}_3 \vee x_1) \vee \bar{x}_3 x_1$$

Po úpravách vypadá výsledek následovně:

$$y = x_2 * (\bar{x}_3 \vee x_1) \vee \bar{x}_3 x_1$$

Použitá, případně doporučená literatura:

1. Hoernes, G. E., Heilweil, M. F.: Úvod do Booleovy algebry a navrhování logických obvodů, SNTL, Praha, 1969.
2. Perrin, J. P., Denoutte, M., Daclain, E.: Logické systémy, TKI, SNTL, Praha, 1986.
3. Balátě, J.: Teorie automatického řízení III, ES VUT, Brno, FS, 1992.

[Diskuze](#)[dotaz @](#)[« zpět](#)

Stránku zpracoval: Žáčková Lucie
Pracoviště: UTB ve Zlíně, IŘPI, Fakulta technologická
Poslední modifikace: 30.11.2007